

Apunte de clases

Mecánica de fluidos



UNIVERSIDAD
SAN SEBASTIAN
Facultad de Ingeniería
y Tecnología

INGE 1432



AUTORES:

Andres Soto, Gustavo Navarro, Roberto Acevedo

Contenido

Capítulo 1	4
Propiedades de los fluidos	4
1.1 Variable intensiva – extensiva.	5
1.1.1 Temperatura	6
1.1.2 Volumen	9
1.1.3 Masa	11
1.1.4 Unidades de medida	12
1.1.5 Presión	16
1.1.5.1 Presión absoluta y manométrica	16
1.1.5.2 Prensa Hidráulica	19
1.2 Viscosidad de los fluidos	24
1.2.1 Viscosidad dinámica.	24
1.2.2 Viscosidad Cinemática	25
1.3 Fluidos Newtonianos y no newtonianos.	26
Capítulo 2	31
Estática de Fluidos	31
2.1 Paredes rectangulares:	31
2.2 Áreas planas sumergidas	35
2.2.1 Desarrollo general del procedimiento de cálculo de fuerzas y centros de presión de superficies planas sumergidas	36
2.2.2 Carga piezométrica	38
2.2.3 Distribución de la fuerza sobre una superficie curva sumergida	39
2.2.4 Fuerza sobre una superficie curva con fluido debajo de ella	45
2.3 Flotabilidad y Estabilidad	47
2.3.1 Flotabilidad	47
2.3.2 Estabilidad de cuerpos sumergidos por completo	50
2.3.2.1 Grado de estabilidad	54
Capítulo 3	59
Dinámica de Fluidos	59
3.1 El flujo de los fluidos y la ecuación de Bernoulli.	59
3.1.1 Principio de continuidad.	59
3.1.2 Ecuación de Bernoulli	61

3.2	Ecuación General de Energía	69
3.2.1	Dispositivos y equipo	69
3.2.2	Pérdidas o ganancia de energía en un fluido	70
3.2.2.1	Potencia de una bomba	73
3.2.2.2	Eficiencia mecánica de bombas	75
3.2.2.3	Potencia en motores de fluido o turbinas	77
3.3	Características de los Fluidos	78
3.3.1	Número de Reynolds	78
3.3.2	Ecuación de Darcy	80
3.3.2	Pérdidas de fricción en el caso turbulento	82
3.3.3	Diagrama de Moody	82
Capítulo 4	86
	Análisis dimensional	86
4.1	Teorema π de Vaschy - Buckingham	86
Capítulo 5	91
	Perfil de velocidades y pérdidas menores	91
5.1	Perfiles de velocidad en flujo laminar y turbulento	91
5.2	Cálculo de radio hidráulico para secciones transversales no circulares	93
5.3	Número de Reynolds para secciones transversales cerradas no circulares	94
5.4	Perdidas menores	98
5.4.1	Coeficiente de resistencia	98
5.4.1.2	Expansión súbita	98
5.4.1.2	Expansión gradual	100
5.4.1.3	Contracción súbita	102
5.4.1.4	Contracción gradual	102
5.4.1.5	Perdida en la entrada	103
5.5	Coeficientes de resistencia para válvulas y acoplamiento	104
5.5.1	Aplicación de válvulas estándar	106
5.5.1	Vueltas de tuberías (90°)	107
5.5.2	Vueltas de tuberías con ángulo distinto de 90°	107
5.6	Problemas Propuestos	108
	Bibliografía	115

Capítulo 1

Propiedades de los fluidos

Definiciones de la Termodinámica.

Para caracterizar un sistema en equilibrio deben especificarse algunas propiedades. La primera de ellas es la composición que suele expresarse como la masa de cada una de las especies químicas que están presentes en cada fase.

El volumen es una propiedad característica del sistema (V). La presión es otra importante variable termodinámica (P). Existen otras propiedades termodinámicas como son la temperatura, la energía interna y la entalpía, pero se definirán oportunamente.

Presión es un escalar y se define como la magnitud de la fuerza normal por unidad de área ejercida por el sistema sobre una pared que lo comunica con el medio ambiente u otro sistema.

$$P = \frac{F}{A}$$

Debe notarse que se usa la componente de la fuerza perpendicular a la superficie, por lo que definido de esta forma es un escalar esta magnitud de la fuerza (una componente, donde carece de sentido expresarlo vectorialmente dado que solo interesa su magnitud), y el área es otro escalar, luego es la división de dos variables escalares.

Las unidades más comunes de presión son:

Pascal (Pa): $1 Pa = 1 \frac{N}{m^2}$

kilo Pascal (kPa): $1 kPa = 10^3 Pa = 1000 Pa$

Mega Pascal (MPa): $1 MPa = 10^6 Pa = 1000000 Pa$

Torr (Torr o mm Hg) : Es la presión ejercida a $0^\circ C$ por una columna de mercurio de 1 mm de altura con $g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$

Atmósfera: (1atm) La unidad de presión denominada atmósfera equivale a la presión que ejerce la atmósfera terrestre al nivel del mar.

Psi (Pound-force/square inch) unidad inglesa. Se refiere a la medida de presión de aire por libra por pulgada cuadrada.

Un **Bar** es una **unidad de presión** muy utilizada en aire comprimido. Su equivalencia más inmediata es a la atmósfera o al kgf/cm^2 .

$$1 \text{ bar} = 1,0 \times 10^5 Pa = 1,01972 \frac{kgf}{cm^2}$$

Conversiones de presión:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr} = 760 \text{ mmHg} = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1,033 \text{ kgf/cm}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1,013 \text{ Bar}$$

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ atm} = 14,68 \text{ lbf/in}^2 = 14.68 \text{ psi}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 0,986923 \text{ atm}$$

1.1 Variable intensiva – extensiva.

Una propiedad termodinámica extensiva depende de la cantidad de materia (por ejemplo, la masa y el volumen). Aquellas propiedades termodinámicas que **no** dependen de la cantidad de materia se denomina intensiva (densidad, presión, temperatura).

Si cada propiedad intensiva es constante a lo largo de un sistema, el sistema es homogéneo. Cuando un sistema no es homogéneo puede contener varias partes o subsistemas que sí lo son, denominadas fases. El sistema se dice heterogéneo si tiene dos o más fases.

Si, por ejemplo, una variable extensiva como la masa, se divide por el volumen que también es intensiva, la variable que se define es intensiva. De este modo la densidad que se define como la masa por unidad de volumen del cuerpo, es intensiva.

Se definen como notación “s”, “l” y “g” respectivamente al estado sólido, a líquido y al gaseoso.

Si dos sistemas termodinámicos separados, tienen valores de cualquier propiedad termodinámica medida iguales, entonces se dice que los sistemas están en el mismo estado termodinámico.

Ahora bien, no se requiere medir todas las propiedades para establecer que se encuentran en el mismo estado termodinámico. Basta sólo definir para una sustancia pura dos propiedades termodinámicas intensivas para determinar el estado.

Un sistema termodinámico en un estado de equilibrio dado tendrá un valor particular para cada variable termodinámica, llamadas también funciones de estado. Los términos “variable termodinámica”, “propiedad termodinámica” y “función de estado” se usan como sinónimos.

Una función de estado depende del sistema y no de su historia (o sea, no le importa su trayectoria).

1.1.1 Temperatura

Ley cero

La ley cero de la termodinámica dice que, si un sistema "A" está en equilibrio térmico con otro "B" y además lo está con otro sistema "C", entonces "B" está en equilibrio con "C". Lo anterior es un hecho experimental que se observa en la figura 1:

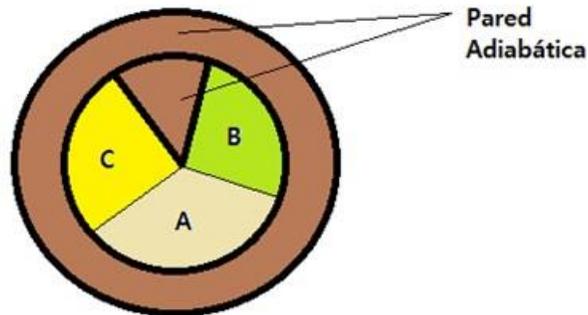


Figura 1: Ley cero de la termodinámica

Del mismo modo que los sistemas en equilibrio mecánico tienen una presión común para alcanzar su equilibrio (se igualan presiones), es razonable suponer que existe una propiedad que defina el equilibrio térmico. Dicha función es la temperatura que es una propiedad intensiva.

En general la temperatura se mide con termómetros de mercurio o alcohol. ¿Por qué no se usa agua? Esto se debe a que el agua se contrae entre 0°C y 4°C a 1 atmósfera de presión y se dilata sobre 4°C. Dado que los termómetros dependen de dicha dilatación para su lectura, el agua es un mal candidato a ser usado. El mercurio, en cambio, con temperaturas crecientes siempre se dilata.

El mercurio se expande al recibir calor y por ende se expande con la temperatura. Lo anterior permite establecer expresiones analíticas de modo de construir escalas que referencien una temperatura.

¿Cómo se construye una escala de temperatura?

Definiremos el coeficiente de dilatación isobárica (β) que más adelante abordaremos en detalle:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

El mercurio, por ejemplo, en un termómetro está diseñado de tal manera, que se encuentra confinado en un tubo de sección constante de área "A". Luego, "V" que es el volumen, en forma diferencial puede reescribirse como:

$$\beta = \frac{1}{A \cdot l} \left(\frac{\partial(A \cdot l)}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{A \cdot l} \left(\frac{A \cdot \partial(l)}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{A \cdot l} \left(\frac{A \cdot \partial(l)}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial(l)}{\partial T} \right)_P$$

Donde “ l ” es la longitud dada por el vector unitario “ \hat{x} ”. Para una temperatura dada T_0 la longitud del mercurio que se tiene es l_0 .

La “ P ” que es subíndice en el paréntesis da cuenta que la presión es constante en el proceso en estudio. Esto es una notación para indicar que esa variable es invariante para el caso de estudio.

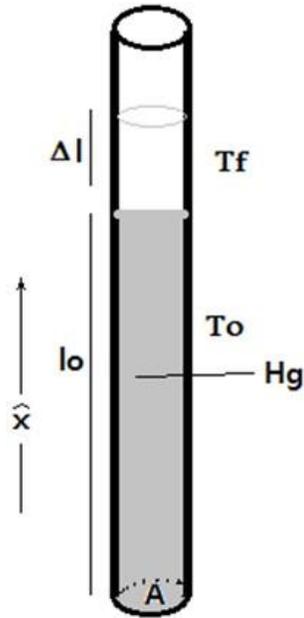


Figura 2: Diseño de un Termómetro.

El termómetro evoluciona entre dos temperaturas, desde una inicial T_0 a una final T_f desde la longitud “ l_0 ” hasta l_f

$$l_0 + \Delta l = l_f$$

Usando:

$$\beta = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_P$$

Luego puede plantearse una ecuación diferencial simple de variables separables:

$$\int_{T_0}^{T_f} \beta dT = \int_{l_0}^{l_f} \frac{dl}{l}$$

Resolviendo la ecuación diferencial simple se obtiene:

$$\beta(T_f - T_0) = \ln\left(\frac{l_f}{l_0}\right)$$

La función inversa al logaritmo natural es la exponencial, se tiene:

$$l_f = l_0 \cdot e^{\beta(T_f - T_0)}$$

El coeficiente de dilación isobárico (β) es un valor siempre pequeño, mucho menor que la unidad, del orden de 10^{-6} .

Lo anterior permite realizar una aproximación matemática usando series. En este caso se utiliza la expansión en serie de Maclaurin, de modo que $e^x \cong 1 + x$, solo válido si $x \ll 1$.

De este modo se tiene finalmente que la respuesta de un termómetro puede aproximadamente y con buena precisión aproximarse a una respuesta lineal de la forma:

$$l_f = l_0 (1 + \beta(T_f - T_0))$$

Que es una escala lineal de medida, que puede usarse para medir temperaturas y que es la función analítica que usualmente se utiliza para diseñar termómetros.

Por ejemplo, para la escala Celsius, se elige el punto triple del agua cuyo valor es $0,01^\circ\text{C}$ y una atmósfera de presión, que es un concepto físico de estado de la materia del agua en estado puro. Del mismo modo se conoce un segundo punto, su punto de ebullición a una presión de una atmósfera de presión que es a una temperatura de 100°C . Esto permite establecer la escala. Dicha escala no es la única y se pueden establecer otras escalas del mismo modo (dos puntos definen una recta).

Las escalas de medida se relacionan unas con otras de la siguiente forma:

$$T(^{\circ}\text{F}) = 1,8 T(^{\circ}\text{C}) + 32^{\circ}\text{F}$$

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,15 \text{ K}$$

$$T(\text{R}) = T(^{\circ}\text{F}) + 459,67\text{R}$$

El **kelvin** (símbolo: K), antes llamado grado **Kelvin**, es la unidad de **temperatura** de la **escala** creada en 1848 por William Thomson, primer barón de **Kelvin**, sobre la base del grado Celsius, estableciendo el punto cero en el cero absoluto ($-273,15^\circ\text{C}$) y conservando la misma dimensión.

Se denomina **Rankine** (símbolo R) a la **escala de temperatura** que se define midiendo en grados Fahrenheit sobre el cero absoluto, por lo que carece de valores negativos. Esta **escala** fue propuesta por el físico e ingeniero escocés William **Rankine** en 1859.

1.1.2 Volumen

El volumen es una medida extensiva dado que depende de la cantidad de materia. En matemáticas se interpreta como un objeto de tres dimensiones, con unidades como se expresa a continuación en la tabla 1. En el sistema internacional su unidad básica es el m^3 mientras que en unidades inglesas se utiliza el pie^3 o ft^3 .

kilómetro cúbico	km³	1 000 000 000 m³
decámetro cúbico	dam ³	1 000 m ³
metro cúbico	m ³	1 m ³
decímetro cúbico	dm ³	0,001 m ³
centímetro cúbico	cm ³	0,000001 m ³

Tabla 1: Conversiones de volumen relacionadas al m^3 .

Otras unidades de volumen:

El **galón** (símbolo **gal**) es una unidad de volumen que se emplea en los países anglosajones.

El **litro** (símbolos **L** o **l**) es una unidad de volumen del sistema métrico decimal, aceptada por el SI, igual a 1 decímetro cúbico (dm^3), 1000 centímetros cúbicos (cm^3) o 1/1000 metros cúbicos. Un decímetro cúbico (o litro) ocupa un volumen de $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ (véase la figura) y, por tanto, es igual a una milésima de un metro cúbico. 1 galón (GAL) equivale a 3,78541 Litros (L).

$$1\text{ ft}^3 = 1728\text{ in}^3 = 0,0283168\text{ m}^3 = 28,3168\text{ L}$$

$$1000\text{ L} = 1\text{ m}^3$$

Volúmenes y áreas:

La matemática mediante el uso de integrales permite determinar el volumen y área de varias figuras geométricas que son de uso cotidiano.

A continuación, la figura 3 ilustra ejemplos de cálculo de volúmenes:

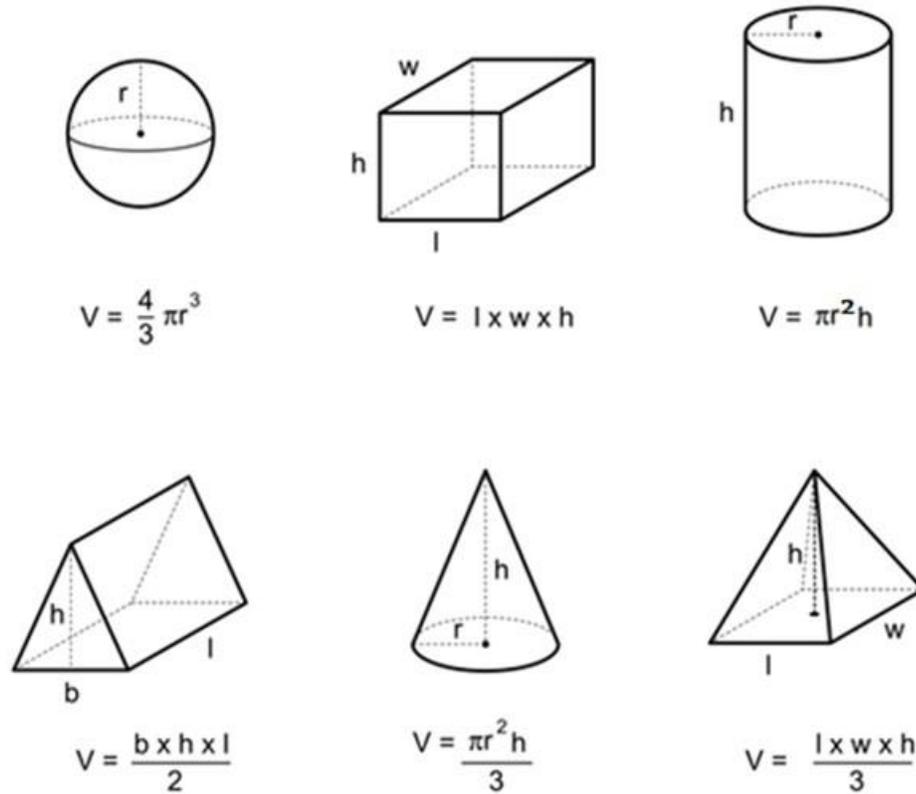


Figura 3: Figuras geométricas y su volumen.

Áreas

Del mismo modo que se miden volúmenes, se establecen áreas. Las unidades en sistema internacional se miden en m^2 como unidad fundamental y en unidades inglesas se tiene el pie^2 .

$$1m^2 = 10000 \text{ cm}^2 = 10,7639 \text{ ft}^2 = 1550,0031 \text{ in}^2$$

$$1ha = 2,47104 \text{ acre} = 0,01km^2 = 10000m^2$$

La figura 4 ilustra las ecuaciones que permiten obtener áreas de figuras geométricas de uso frecuente.

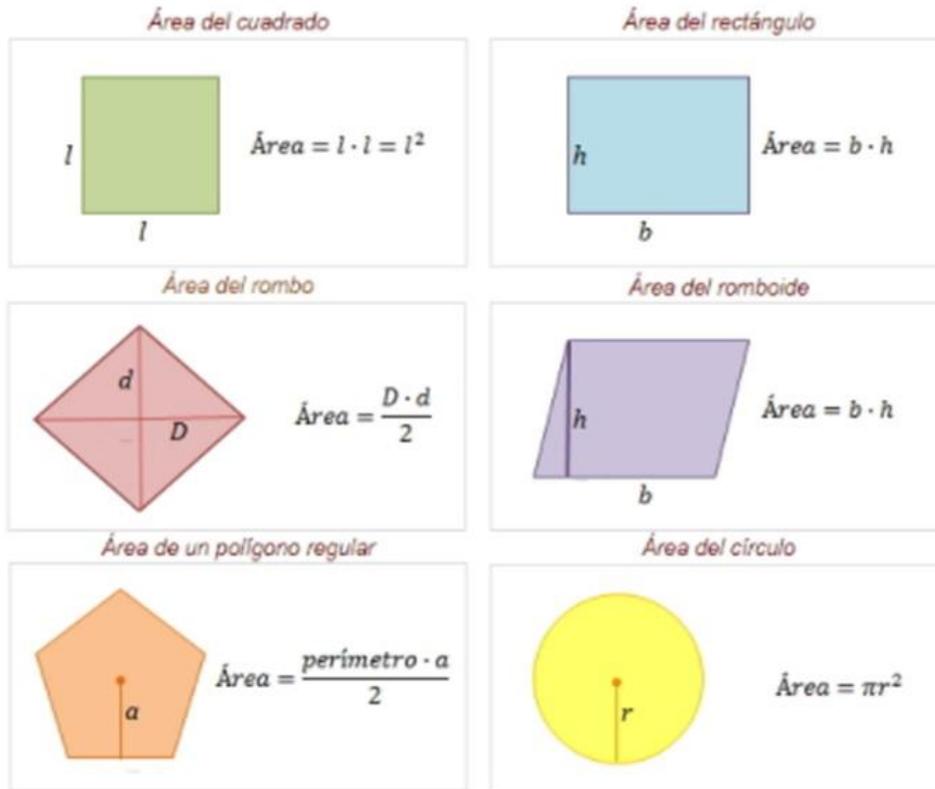


Figura 4: Áreas de figuras geométrica frecuentes.

1.1.3 Masa

Como **masa** designamos la magnitud física con que medimos la cantidad de materia que contiene un cuerpo. Como tal, su unidad, según el Sistema Internacional de Unidades, es el kilogramo (kg). Tiene otra definición como medida de la inercia.

Sus unidades usuales son:

En Sistema internacional se usa el kilogramo. En sistema de unidades inglesas el slug.

Conversiones:

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 2,204622 \text{ lb}$$

$$1 \text{ lb} = 16 \text{ oz} = 3,108095 \cdot 10^{-2} \text{ slug}$$

$$1 \text{ tonelada (t)} = 1000 \text{ kg}$$

$$1 \text{ slug} = 14,5939 \text{ kg}$$

La **masa molar**, como tal, es la masa de un mol de una sustancia, o, dicho de otro modo, es la propiedad física de un compuesto que expresa la relación constante entre la masa y la cantidad de sustancia que caracteriza toda muestra de sustancia. Se expresa en gramos por mol (g/mol).

En **Química**, la **masa molecular** es aquella que indica la masa de una molécula de una sustancia. Como tal, se obtiene mediante la suma de todos los pesos atómicos involucrados en la fórmula molecular de un compuesto. Se mide en unidades de masa atómica o UMA (u), o unidades Dalton (Da), siendo ambas equivalentes.

Concepto de Densidad: Es la cantidad de masa por unidad de volumen. Una complejidad al definir densidad tiene relación con el volumen considerado del cuerpo en estudio. Existen cuerpos compactos regulares e irregulares. En cuerpos irregulares es usual medir su volumen por ejemplo usando la inmersión en un fluido y determinando la diferencia de volumen en un vaso o probeta graduada. No constante existen ocasiones donde el material es poroso y la densidad a usar debe pensarse en función del uso de dicho material. Existe un tercer caso, quizás el más complejo de las posibilidades a considerar, donde el material está conformado por partículas separadas granulométricas ya sea polvo, mineral, pellet u otra forma de asociación. En este caso debe considerarse en ocasiones los espacios intergranulares y en ocasiones la porosidad. De este modo aparecen distintos nombres para la densidad y distintas formas de definirla, que no resultan tan triviales como simplemente representar la expresión: $\rho = \frac{m}{V}$. Cuando se hace referencia a fluidos, la expresión anterior es simple si son homogéneos y parece razonable utilizar la expresión directamente.

1.1.4 Unidades de medida

En sistema internacional las cantidades básicas son:

Longitud: (m) metro

Tiempo: (s) segundo

Masa: (kg) kilogramo

Es útil conocer la fuerza que se deriva de las unidades fundamentales anteriores:

Fuerza ($N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$) Newton

Se debe recordar que la fuerza es el producto de la masa por la aceleración. $\vec{F} = m\vec{a}$. La aceleración de gravedad se suele considerar como $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Las unidades en sistema inglés son las siguientes:

Longitud: (ft) pie

Tiempo: (s) segundo

Masa: ($\frac{lb \cdot s^2}{pie}$) slug

La aceleración de gravedad se suele considerar como $g = 32,2 \frac{pie}{s^2}$

En el sistema inglés se hace la distinción entre libra – masa y libra – fuerza:

Se define $g_c = \frac{32,2 \text{ lbm}(\text{pie}/\text{s}^2)}{\text{lb}f}$

$$F = m \left(\frac{a}{g_c} \right) = m \frac{g}{g_c}$$

donde lbm son libra-masa y lbf son libra fuerza. Estas unidades distinguen si un objeto está en la tierra o por ejemplo en la luna. Si el objeto está en la tierra, $\text{lbm} = \text{lbf}$.

Por ejemplo, si el objeto está en la luna, $g_{LUNA} = \frac{1}{6} g_{TIERRA} = 5,4 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}$.

Si se dispone de 100 lbm, entonces la Fuerza de gravedad lunar será:

$$F = \frac{mg}{g_c} = 100 \text{ lbm} \cdot \frac{5,4 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}}{32,2 \frac{\text{lbm} \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}}{\text{lb}f}} = 16,8 \text{ lb}f$$

Dado que se trabajará en la tierra se suele usar lb sin la distinción de lbm o lbf. No obstante, algunos libros lo expresan de esta forma por lo que resulta conveniente la explicación.

Peso específico: es la cantidad de peso por unidad de volumen. $\gamma = W/V$, donde W es el peso y V el volumen.

Gravedad específica (sg): se define como la razón de la densidad de una sustancia a la densidad del agua a 4°C.

$$sg_{sustancia} = \frac{\rho_{sustancia}}{\rho_{agua(4^\circ C)}}$$

Algunas consideraciones importantes:

$\gamma = \rho g$, relación del peso específico con la aceleración de gravedad y la densidad de un fluido.

$W = mg$ que define el peso del fluido.

$$\gamma_{sust} = \rho_{sust} \cdot g = sg_{sust} \cdot \rho_{agua(4^\circ C)} \cdot g = sg_{sust} \cdot \gamma_w$$

Se denota por γ_w el peso específico del agua a 4°C.

Se debe recordar que:

$$g = 32,2 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Además, que en unidad inglesa la masa se expresa en slug: $1slug = \frac{lb \cdot s^2}{pie}$.

$$\gamma_w(4^\circ C) = 9,81 \frac{kN}{m^3}$$

$$\gamma_w(4^\circ C) = 62,4 \frac{lb}{pie^3}$$

$$\rho_w(4^\circ C) = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_w(4^\circ C) = 1,94 \frac{slug}{pie^3}$$

Prefijos más utilizados en sistemas de unidades:

Giga (G): 10^9

Mega (M): 10^6

Kilo (k): 10^3

mili (m): 10^{-3}

micro (μ): 10^{-6}

nano (n): 10^{-9}

Ayuda memoria

El cálculo realizado en escalas termométricas transforma a una expresión exponencial en un término lineal. ¿Qué da derecho a hacer esto?

El fundamento está en la matemática y tiene relación con las Series de Taylor y las series de Maclaurin.

Teorema de Taylor:

Si P es un polinomio de grado “n” o menor, y “a” es cualquier número real, se tiene que:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Con mayor generalidad, si “f” es una función es posible representar la función mediante un polinomio de términos en torno al punto “a” que posee infinitos términos.

$$f(x) = \frac{f(a)(x - a)^0}{0!} + \frac{f'(a)(x - a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x - a)^3}{3!} + \dots$$

Cuando “a” vale cero, esta serie se conocen como serie de Maclaurin.

Ahora veremos el caso de la serie de Maclaurin (en torno a cero) que tiene sentido cuando el valor de “x” es pequeño o sea $x \ll 1$:

$$f(x) = \frac{f(0)(x-0)^0}{0!} + \frac{f'(0)(x-0)^1}{1!} + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x-0)^3}{3!} + \dots$$

Que se simplifica a:

$$f(x) = \frac{f(0)}{1} + \frac{f'(0) * x}{1} + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x)^3}{3!} + \dots$$

De este modo si por ejemplo buscamos una representación de la función exponencial en torno a un valor muy pequeño, $x \ll 1$, se usa lo anterior y queda:

$$e(x) = e^0 + \frac{e'(0) * x}{1} + \frac{e''(0)(x)^2}{2!} + \frac{e'''(0)(x)^3}{3!} + \dots$$

$$e(x) = 1 + \frac{1 * x}{1} + \frac{1 * (x)^2}{2!} + \frac{1 * (x)^3}{3!} + \dots$$

Finalmente:

$$e(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Ahora, realizaremos cálculos para ver ejemplos de lo anterior:

Evaluaremos en $x = 0,0001 = 10^{-4}$ lo que es un valor de x pequeño:

La exponencial de $e^{0,0001} = 1,000100005$ si usamos la calculadora.

Si ahora usamos el polinomio obtenido para e(x) hasta la potencia cúbica da:

$$e(x) \cong 1 + 0.0001 + \frac{0.0001^2}{2} + \frac{0.0001^3}{6} = 1,0001000005 \text{ (¡lo mismo que la calculadora!)}$$

Ahora usemos la potencia cuadrada:

$$e(x) \cong 1 + 0.0001 + \frac{0.0001^2}{2} = 1,0001000005$$

Vemos que sigue dando lo mismo por un tema de cifras significativas.

Usemos los dos primeros términos:

$e(x) \cong 1 + 0.0001 = 1,0001$ lo que tiene 4 decimales de precisión. Esta precisión es suficiente para las medidas físicas que se requieren para calibrar un termómetro y por ende usaremos como aproximación:

$$e(x) \cong 1 + x$$

1.1.5 Presión

Variación de la presión en un fluido incompresible

1.1.5.1 Presión absoluta y manométrica

Se define la presión manométrica como la diferencia entre la presión absoluta y la atmosférica. La presión más baja que existe es la del vacío perfecto, esto es, cuando un recipiente no tiene materia en su interior (átomos o moléculas).

Se suele usar como referencia a la presión atmosférica (P_{atm}), pero no es la única referencia. Existe otra referencia, la presión Absoluta (P_{abs}).

Una presión manométrica superior a la atmosférica siempre es positiva. Una presión manométrica inferior a la atmosférica es negativa. A estos valores negativos en ocasiones se le llama “vacío”. La presión absoluta solo admite valores positivos.

$$P_{man} = P_{abs} - P_{atm}$$

Esto puede ilustrarse mediante la figura 5.

La presión varía con la ubicación y clima. Por defecto se asume un valor de 101 kPa (abs) o 14,7 psia.

$$1 \text{ psi} = 1 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2}$$

La unidad “psia” significa que está referida a la escala absoluta y “psig” significa que está referida a la escala manométrica.

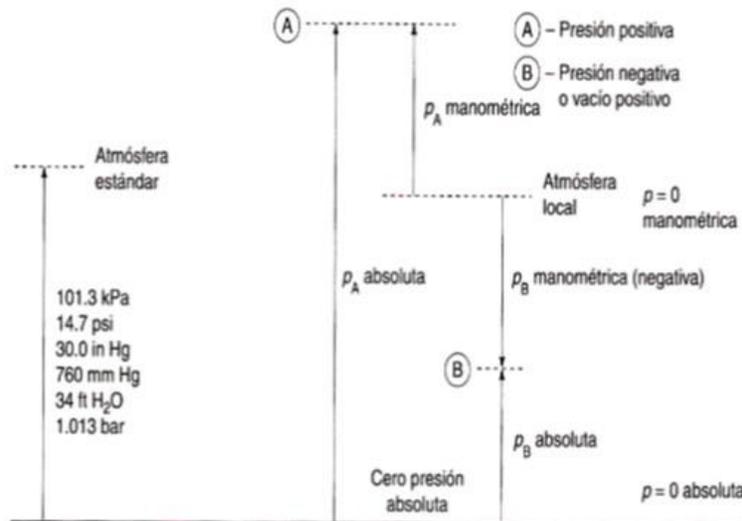


Figura 5: Presiones absoluta, atmosférica y Vacío.

Problema 1:

Expresar una presión de 155 kPa (man) como presión absoluta. Suponga $P_{atm} = 98 \text{ kPa (abs)}$

Solución:

$$P_{abs} = P_{man} + P_{atm}$$
$$P_{abs} = 155 \text{ kPa (man)} + 98 \text{ kPa (abs)} = 253 \text{ kPa (abs)}$$

Problema 2:

Expresar una presión de 10,9 psia como presión manométrica. La presión atmosférica es de 15 psia.

Solución:

$$P_{man} = 10,9 \text{ psia} - 15 \text{ psia} = -4,1 \text{ psig}$$

Se lee "4,1 psi de vacío".

Se ha demostrado anteriormente que la presión experimenta variaciones en la dirección vertical, además se ha mostrado que la presión depende de la densidad, así como de la aceleración de la gravedad y como la gravedad varía con la altura entonces afectará a la presión, se tiene:

$$dP = -\rho(z)gdz$$

Para propósitos ingenieriles se puede considerar a la aceleración de la gravedad como una constante. Adicionalmente, si el fluido es incompresible (líquidos), puede considerarse en primera aproximación que la densidad es constante. Integrando se tiene en este caso:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{z_1}^{z_2} -\rho g dz$$

A partir de este resultado, se observa que un incremento en la elevación (dz , *positivo*) corresponde a una disminución en la presión (dp , *negativo*). Siendo p_1 y p_2 las presiones en los puntos z_1 y z_2 , respectivamente, la ecuación, al resolver se tiene:

$$(p_2 - p_1) = -\rho g(z_2 - z_1)$$

Por otro lado, si el recipiente está abierto en la parte superior, o sea está abierto a la atmósfera, la presión a cualquier profundidad $h = z_1 - z_2$ es:

$$p = p_0 + \rho gh$$

Donde p_0 es la presión atmosférica, h es a profundidad medida a partir de la superficie libre.

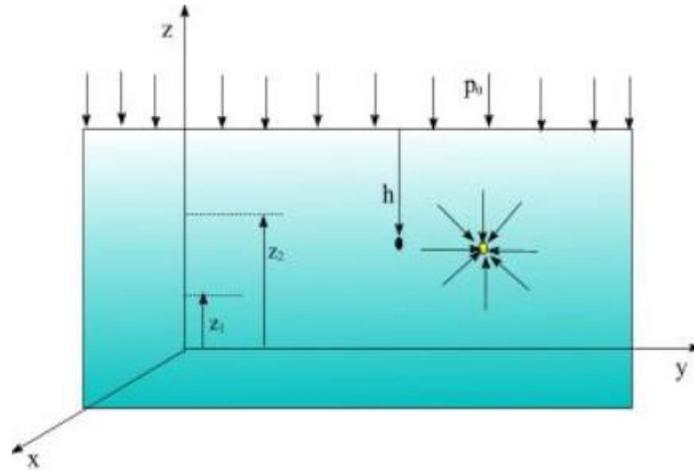


Figura 6: Presión Hidrostática en un fluido

Principio de Pascal. Debido a que la presión en un fluido sólo depende de la profundidad, cualquier incremento en la presión en la superficie se debe transmitir a cualquier punto en el fluido. Este efecto fue descubierto por primera vez por Blaise Pascal y se le conoce como *Principio de Pascal* y establece:

“Un cambio en la presión aplicada a un fluido encerrado en un depósito se transmite íntegramente a cualquier punto del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene”

1.1.5.2 Prensa Hidráulica

Una de las aplicaciones más importantes del principio de pascal es la prensa hidráulica representada en la figura 7. Consiste en dos cilindros de diferentes diámetros d_1 y d_2 ($d_1 \ll d_2$) interconectados y llenados con un fluido los que llevan émbolos de áreas A_1 y A_2 . Si al émbolo A_1 se le aplica una fuerza F_1 esta provocará una presión adicional en el fluido, presión que se transmite según la ley de pascal hasta el émbolo de área A_2 produciendo una fuerza F_2 dada por:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

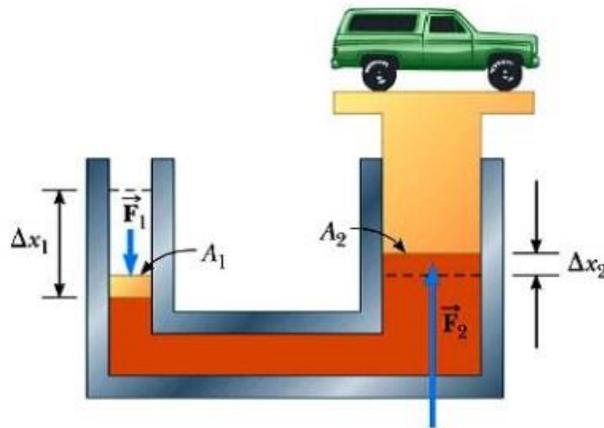


Figura 7: presión hidráulica.

Puesto que $d_1 \ll d_2$ entonces la fuerza F_2 será mayor que F_1 .

Paradoja de pascal:

En la figura 8 se muestra el agua en un recipiente formado por partes de diferentes formas. En una primera observación, pareciera que la presión en el recipiente mayor es más elevada y que como consecuencia de esta presión el agua deberá alcanzar mayor altura el recipiente más pequeño. Esto se conoce como *paradoja hidrostática*. La presión sólo depende de la profundidad, por lo tanto, el líquido debe encontrarse a la misma altura en todas las partes del recipiente.



Figura 8: Paradoja de Pascal.

$$P_A = P_B = P_C = P_D$$

Lo anterior, da los fundamentos para resolver algunos problemas de interés, por ejemplo, los manómetros. Para esto es necesario definir algunos conceptos:

Problema 3:

Determine una expresión para calcular el valor de la **presión manométrica** del aire al interior del estanque "Pa", si se conoce las dimensiones de las alturas verticales K, L y M y las densidades del mercurio (Hg), el Agua y el aceite. Ver figura 9. La presión atmosférica tiene valor P_{atm} .

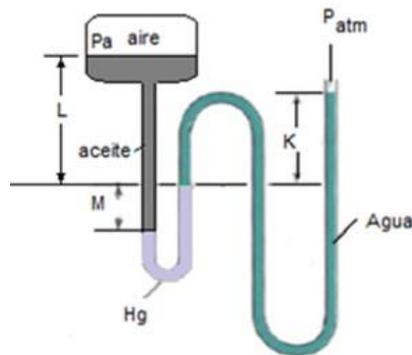


Figura 9: Manómetro

Solución:

$$P_a + (M + L) * \rho_{aceite} * g = M * \rho_{Hg} * g + K * \rho_{H2O} * g + P_{atm}$$

$$P_a = M * \rho_{Hg} * g + K * \rho_{H2O} * g - (M + L) * \rho_{aceite} * g + P_{atm}$$

(absoluta) Sin P_{atm} es manométrica:

$$P_a = M * \rho_{Hg} * g + K * \rho_{H2O} * g - (M + L) * \rho_{aceite} * g$$

Problema 4:

La figura 10, presenta un fluido estático compuesto de Agua, aceite y mercurio. Se conocen las dimensiones a , b y los valores de sg_1 y sg_2 . También es conocido γ_{agua} . El sistema está cerrado a la atmósfera.

Se desea determinar la diferencia $P_A - P_B$.

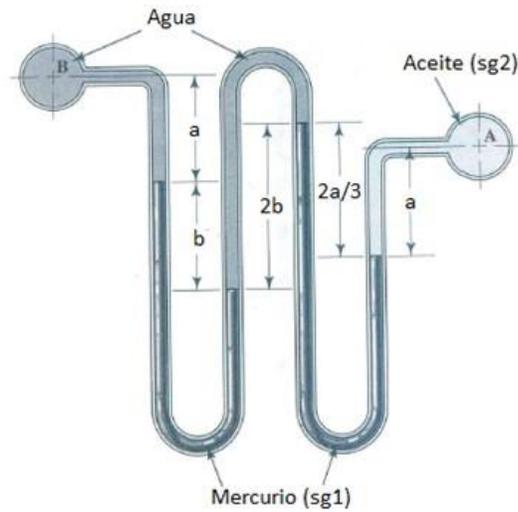


Figura 10: Manómetro, componentes y dimensiones.

Solución:

Se definen niveles de presión P_1 , P_2 y P_3 como se ilustra en la figura 11 y se construyen ecuaciones que relacionan los datos:

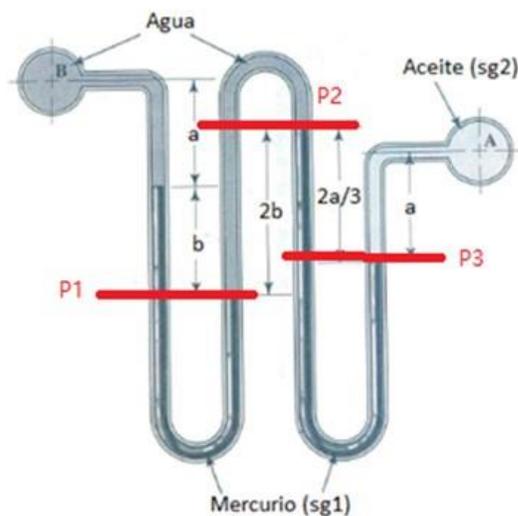


Figura 11: referencias P_1 , P_2 y P_3

$$P1 = b * sg_1 * \gamma_{agua} + a * \gamma_{agua} + P_B$$

$$P1 = 2b * \gamma_{agua} + P2$$

$$P3 = \frac{2a}{3} * sg_1 * \gamma_{agua} + P2$$

$$P3 = a * sg_2 * \gamma_{agua} + P_A$$

Luego en el sistema de ecuaciones reduce las variables auxiliares multiplicando convenientemente algunas de las ecuaciones por -1:

Sumando todas las ecuaciones, resulta:

$$-P1 + P1 - P3 + P3 = -b * sg_1 * \gamma_{agua} - a * \gamma_{agua} - P_B + 2b * \gamma_{agua} + P2$$

$$-\frac{2a}{3} * sg_1 * \gamma_{agua} - P2 + a * sg_2 * \gamma_{agua} + P_A$$

$$0 = -b * sg_1 * \gamma_{agua} - a * \gamma_{agua} - P_B + 2b * \gamma_{agua} - \frac{2a}{3} * sg_1 * \gamma_{agua} + a * sg_2 * \gamma_{agua} + P_A$$

Finalmente:

$$P_A - P_B = b * sg_1 * \gamma_{agua} + a * \gamma_{agua} - 2b * \gamma_{agua} + \frac{2a}{3} * sg_1 * \gamma_{agua} - a * sg_2 * \gamma_{agua}$$

$$P_A - P_B = sg_1 * \gamma_{agua} * \left(b + \frac{2}{3}a \right) + \gamma_{agua}(a - 2b) - sg_2 * \gamma_{agua} * a$$

Problema 5:

Se tiene un contenedor de aceite, abierto a la atmósfera, conectado por una tubería a otro contenedor lleno de mercurio, cuya superficie se contacta con un balón de aire a presión “ P_{aire} ” igual a dos veces la presión atmosférica. En la tubería se observa la separación de ambos fluidos.

Determine el valor de la altura “ z_2 ” si se conocen las dimensiones y geometría del problema según indica la figura 12.

Dimensiones: $z_1 = 7,0\text{ m}$; $d_1 = 5,0\text{ m}$ y $d_2 = 2,0\text{ m}$, P atmosférica local = 101 kPa

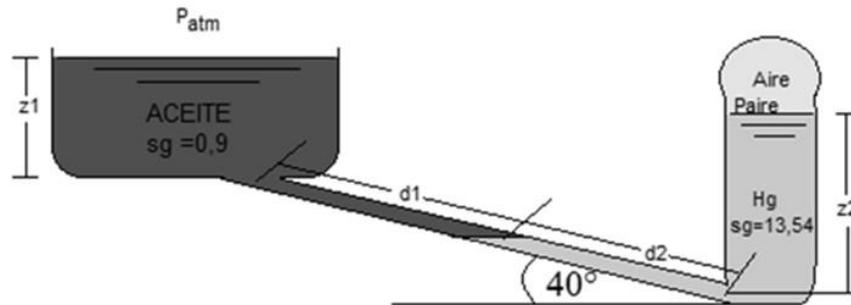


Figura 12: contenedor ejemplo 5

Sea $sg_1 = 0,9$ y $sg_2 = 13,54$

Solución:

$$P_{atm} + sg_1 * \gamma_{agua}(z_1 + d_1 \text{sen}40^\circ) + sg_2 * \gamma_{agua} * d_2 * \text{sen}40^\circ = sg_2 * \gamma_{agua} * z_2 + P_{aire}$$

$$\frac{P_{atm} - P_{aire} + sg_1 * \gamma_{agua}(z_1 + d_1 \text{sen}40^\circ) + sg_2 * \gamma_{agua} * d_2 * \text{sen}40^\circ}{sg_2 * \gamma_{agua}} = z_2$$

$$\frac{P_{atm} - P_{aire} + sg_1 * \gamma_{agua}(z_1 + d_1 \text{sen}40^\circ)}{sg_2 * \gamma_{agua}} + d_2 * \text{sen}40^\circ = z_2$$

$$\frac{P_{atm} - P_{aire}}{sg_2 * \gamma_{agua}} + \frac{sg_1(z_1 + d_1 \text{sen}40^\circ)}{sg_2} + d_2 * \text{sen}40^\circ = z_2$$

Remplazando los valores

$$\frac{-101\text{kPa}}{13,54 * 9,81 \frac{\text{kPa}}{\text{m}}} + \frac{0,9 * (7,0\text{ m} + 5,0\text{ m} * \text{sen}40^\circ)}{13,54} + 2,0\text{ m} * \text{sen}40^\circ = z_2$$

$$-0,760\text{ m} + 0,679\text{ m} + 1,285\text{ m} = z_2$$

$$1,204\text{ m} = z_2$$

Con dos cifras significativas

$$1,2\text{ m} = z_2$$

1.2 Viscosidad de los fluidos

Un indicador de la viscosidad de un fluido es la facilidad con que fluye. El aceite es más viscoso que el agua y por esto fluye más lento. El aceite frío gotea más despacio que el aceite caliente dado que la viscosidad aumenta si la temperatura disminuye en este líquido.

1.2.1 Viscosidad dinámica.

Cuando un fluido se mueve, dentro de él se desarrolla un esfuerzo cortante " τ " que se puede definir como la fuerza que se requiere para que una unidad de área se deslice sobre otra área adyacente. Se mide en unidades de $\frac{N}{m^2}$ o Pa .

En fluidos como el agua y el alcohol la magnitud del esfuerzo cortante es directamente proporcional al cambio de velocidad entre las posiciones diferentes del fluido.

Si la distancia entre las superficies es pequeña, entonces la tasa de cambio de velocidad con la posición de "y" es lineal.

Para entender mejor lo anterior se presenta la figura 13 en la cual se observa un perfil de un líquido sobre una pared.

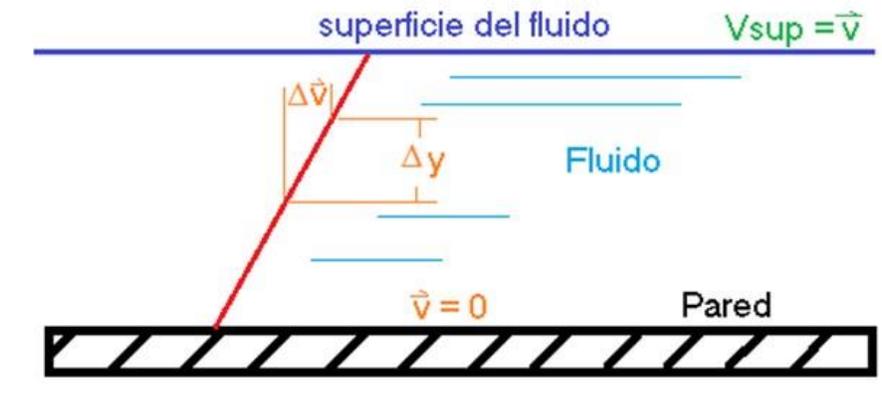


Figura 13: gradiente de velocidad.

El gradiente de velocidad es una medida del cambio de velocidad con la altura y se define como $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta y}$. También se le denomina tasa cortante.

La proporcionalidad se define entonces de la siguiente forma:

$$\tau = \eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

Donde " η " es la constante de proporcionalidad y se conoce como "viscosidad dinámica del fluido"

También se le conoce como viscosidad absoluta.

Por ejemplo, al agitar una pintura requiere mayor esfuerzo que agitar agua. Lo mismo sucede con la miel. Esta observación depende de “ η ” o de un mayor esfuerzo cortante “ τ ” lo que refleja el mayor esfuerzo en realizar la agitación. Notar que lo que se opone al movimiento son las moléculas del mismo material. La miel fluye lentamente, dado que es viscosa. No confundir viscosidad con densidad. Un aceite frío es menos denso que el agua (flota en el agua), pero es más viscoso que el agua, fluye más lento.

De este modo puede definirse la viscosidad dinámica mediante la ecuación:

$$\eta = \tau \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v}$$

Sus unidades son $\frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{m/s} = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s$

También: $\frac{N \cdot s}{m^2} = \frac{Kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{s}{m^2} = \frac{Kg}{m \cdot s}$

En unidades inglesas sus unidades equivalentes son: $\frac{lb \cdot s}{pie^2}$ o $\frac{slug}{pie \cdot s}$

La viscosidad dinámica aún se sigue expresando en el sistema de unidades cgs (centímetros, gramos, segundos). Esto se debe a que muchas de las sustancias a las cuales se les mide viscosidad están dentro del rango de medición de este sistema de unidades.

Se define de este modo el poise:

$$1 \text{ poise} = \frac{\text{dina} \cdot s}{\text{cm}^2} = \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot s} = 0,1 Pa \cdot s$$

$$1 \text{ centipoise} = \frac{1 \text{ poise}}{100} = 1 m Pa \cdot s$$

1.2.2 Viscosidad Cinemática

Se define como la razón entre la viscosidad dinámica y la densidad del fluido.

$$\mu = \frac{\eta}{\rho}$$

“ μ ” tiene las siguientes unidades de medida: $\frac{kg}{m \cdot s} \cdot \frac{m^3}{kg} = \frac{m^2}{s}$ que en unidades inglesas se expresa de la forma $\frac{pie^2}{s}$.

También suele expresarse en sistema de medida cgs en unidad de Stokes:

$$1 \text{ stokes} = \frac{\text{cm}^2}{s} = 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{s}$$

$$1 \text{ centistokes} = \frac{1 \text{ stokes}}{100} = \frac{1 \text{ mm}^2}{s}$$

Los líquidos industriales comunes tienen valores en rangos de 10^{-7} a $10^{-2} \frac{m^2}{s}$ y por esto suelen expresarse en centistokes.

1.3 Fluidos Newtonianos y no newtonianos.

El estudio de la deformación y las características del fluido se denomina reología que puede entenderse como el campo que estudia la viscosidad de los fluidos.

Los fluidos que satisfacen la ecuación:

$$\eta = \tau \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v}$$

Se denominan Newtonianos.

El agua, el aceite, la gasolina, el alcohol, el keroseno, el benceno y la glicerina se clasifican como fluidos newtonianos.

Si en cambio, el fluido no cumple la ecuación anterior se le llama “no newtoniano”. Estos dependen del gradiente de velocidad además de la condición del fluido. Los fluidos no newtonianos pueden adicionalmente clasificarse en dependientes e independientes del tiempo. Los independientes del tiempo, se comportan con $\eta(t) = constante$, mientras que en los dependientes del tiempo la función anterior varía.

Existen tres tipos de fluidos no newtonianos independientes del tiempo, ver figura 14:

1. Seudoplásticos o tixotrópicos: en una gráfica de esfuerzo cortante versus gradiente de velocidad, su curva queda por sobre la línea recta (de pendiente constante) que tendría un fluido newtoniano. Ejemplo de este comportamiento es el plasma sanguíneo, el polietileno fundido, el látex, almibares, adhesivos, melazas y tintas.
2. Fluidos dilatantes: la curva pasa por debajo de la recta de fluidos newtonianos. Algunos ejemplos de fluidos dilatantes son compuestos acuosos con concentraciones altas de sólidos, el almidón de maíz en etilenglicol, almidón en agua y el dióxido de titanio.
3. Fluidos de Bingham o de inserción: requieren aplicar alto esfuerzo cortante antes de comenzar a fluir. Una vez logrado esto, su respuesta es lineal. Ejemplos de este tipo de fluidos son el chocolate, el ketchup, la mostaza, la mayonesa, la pasta de dientes, pinturas, asfalto, el fango de drenaje, suspensiones de agua y ceniza y algunas grasas.

Los fluidos dependientes del tiempo son difíciles de estudiar. Entre ellos están los petróleos crudos a bajas temperaturas, las tintas de impresora, nylon, gelatinas, las mezclas de harina y soluciones poliméricas.

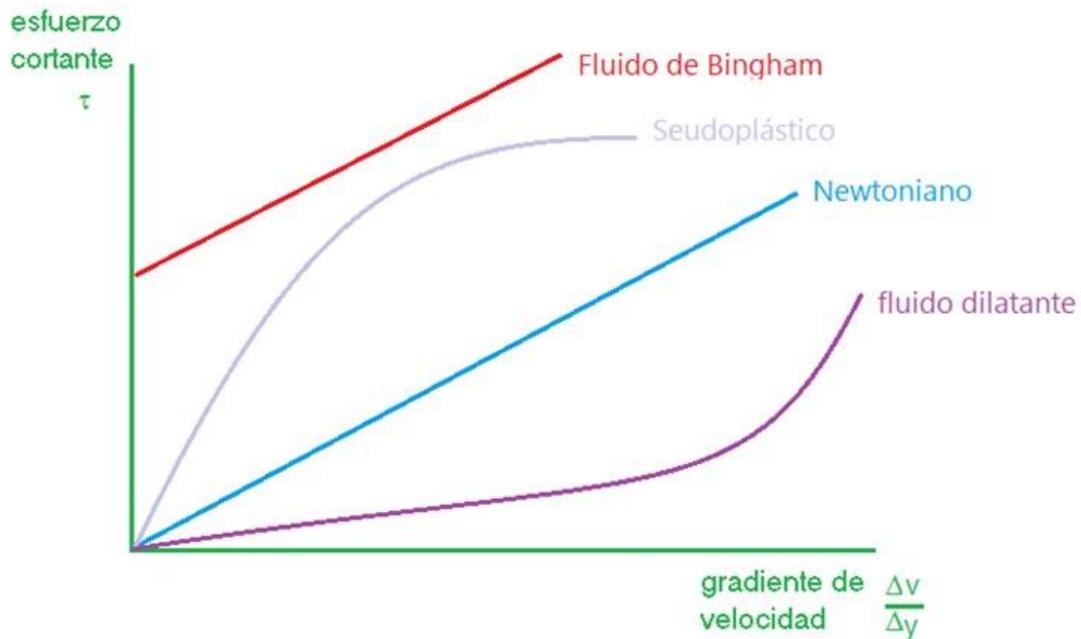


Figura 14: Fluidos no Newtonianos independientes del tiempo.

En general la viscosidad cambia con la temperatura. Sus variaciones suelen ser importantes, por lo que es razonable cada vez que se usa esta variable reportar las condiciones termodinámicas. El apéndice “D” del libro de mecánica de fluidos de Robert Mott, muestra la viscosidad dinámica versus la temperatura de muchos líquidos comunes. Se suelen graficar en escala logarítmica dada las amplitudes de sus valores.

Problema 6:

Para dos cilindros concéntricos rotatorios de radios conocidos, r_1 y r_2 ($r_2 > r_1$), largo L , la distribución de velocidad tangencial del fluido que se mueve en su interior está dada por:

$$v(r) = \frac{0,4}{r} - 1000 * r$$

El momento de torsión, medido en el diámetro interno es “ T ”, conocido y las unidades son consistentes (S.I.) y el cilindro exterior está en reposo.

Demuestre que el torque está dado por:

$$T = 2\pi L\mu \cdot \left[0,4 \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + 500 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \right]$$

Indicación:

$$Torque = r \times F = r \times \tau * A$$

$$A = 2\pi rL$$

$$\tau = -\frac{\mu dv}{dr}$$

Solución:

$$\text{Torque} = r \times \tau * \text{Area} = rxF = r \times \tau * A$$

$$A = 2\pi rL$$

$$\tau = -\frac{\mu dv}{dr}$$

$$F = \tau * A = -2\pi rL \frac{\mu dv}{dr}$$

pero $v(r) = \frac{0.4}{r} - 1000 * r$

$$F(r) = -2\pi L\mu * r \left(-\frac{0.4}{r^2} - 1000 \right)$$

$$F(r)dr = 2\pi L\mu * r \left(\frac{0.4}{r^2} + 1000 \right) dr$$

Luego integro entre r1 y r2:

$$T = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = 2\pi L\mu \int_{r_1}^{r_2} (0.4/r + 1000r)dr$$

$$T = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = 2\pi L\mu * \left[0,4 \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + 1000 \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) \right]$$

Problema 7:

Un cilindro macizo de peso W desconocido, cae en el interior de un cilindro hueco a una velocidad constante " v " conocida. Determinar la viscosidad del aceite que se encuentra entre la pared y el macizo " η (lubricante)". Ver figura 15.

Suponga que el fluido es newtoniano. La caída es en la vertical y el macizo está centrado.

Datos: dimensiones de longitud: a, b, c ; $a > b$, densidad del macizo: ρ (macizo), Todas las unidades son consistentes.

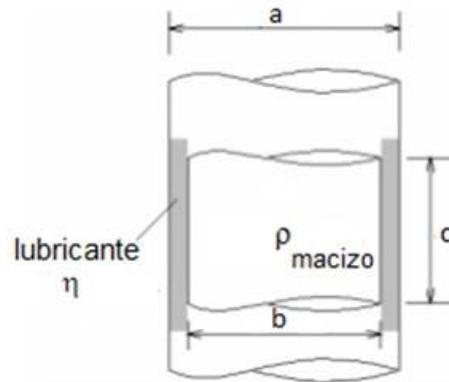


Figura 15: Esquema del problema.

Solución:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} = \eta \frac{v - 0}{\frac{a-b}{2}} = \eta \frac{2v}{a-b}$$

$$\eta = \frac{F(a-b)}{A2v} = \frac{W(a-b)}{A2v} = \frac{\rho_{macizo} * g * V_{macizo} (a-b)}{A2v}$$

Pero volumen de macizo es: $V_{macizo} = \frac{\pi}{4} * b^2 * c$

$$\eta = \frac{\rho_{macizo} * g * \frac{\pi}{4} * b^2 * c * (a-b)}{A2v}$$

Finalmente, A es el área del macizo: $A = \pi * b * c$

Y queda:

$$\eta = \frac{\rho_{macizo} * g * \frac{\pi}{4} * b^2 * c * (a-b)}{\pi * b * c * 2v} = \frac{\rho_{macizo} * b * g * (a-b)}{8v}$$

Problema 8:

Determinar la fuerza que actúa sobre el fondo en ambos casos.

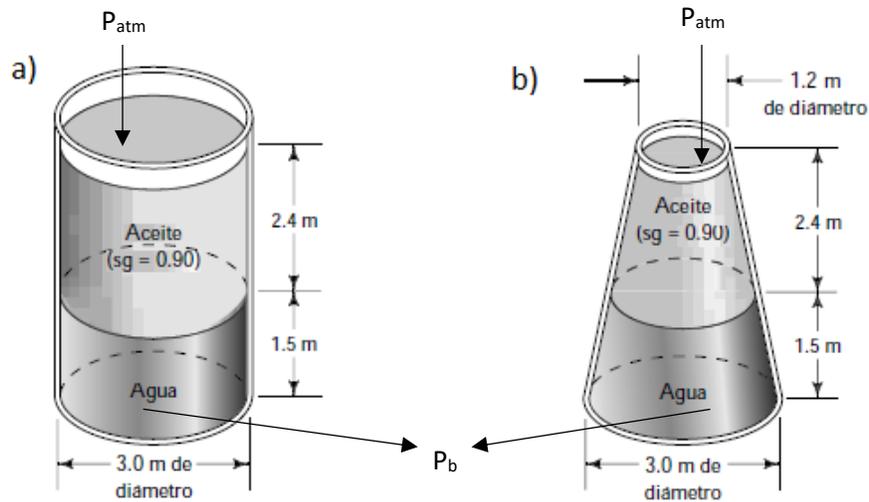


Figura 16: Fuerza en fluidos estáticos

Solución:

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = P * A$$

$$P_b = P_{atm} + \gamma_{ac} * z_{ac} + \gamma_W * z_W$$

$$\gamma_W = 9,81 \frac{kPa}{m}$$

$$\gamma_{ac} = sg_{ac} * \gamma_W = 0,9 * 9,81 \frac{kPa}{m} = 8,83 \frac{kPa}{m}$$

$$P_b = P_{atm} + 8,83 \frac{kPa}{m} * 2,4 m + 9,81 \frac{kPa}{m} * 1,5 m$$

$$P_b = P_{atm} + 35,9 kPa$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (3m)^2}{4} = 7,07 m^2$$

$$\vec{F} = P_b * A = 35,9 kPa * 7,07 m^2$$

$$\vec{F} = 253,8 kN (Manometrica)$$

En (b) el resultado es el mismo.

Capítulo 2

Estática de Fluidos

2.1 Paredes rectangulares:

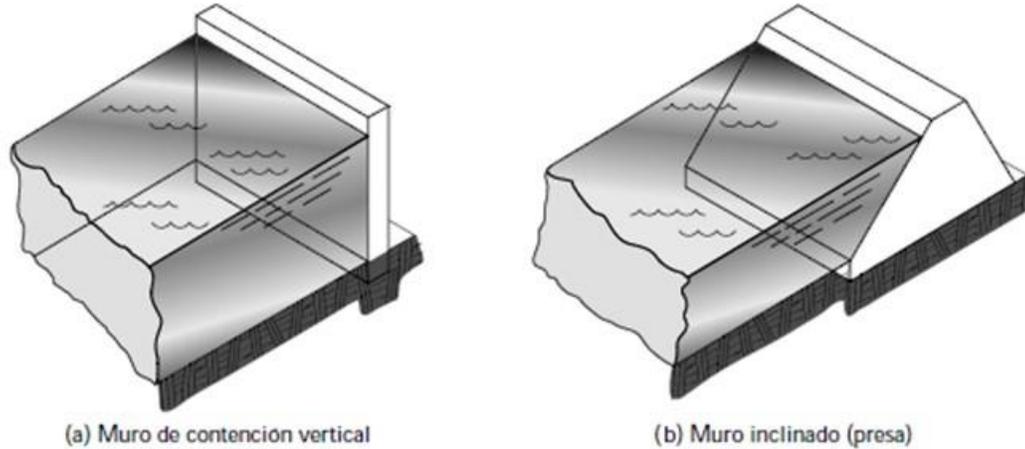


Figura 17: Fuerzas sobre muros verticales

La fuerza ejercida por la presión del fluido tiende a girar la pared vertical o romperla en el fondo (base). La fuerza real se distribuye con un perfil sobre toda la pared. Se desea conocer la fuerza resultante y el lugar donde actúa (centro de presión). Es decir, si se concentra toda la fuerza en un solo punto se señala cuál es ese punto y cuál es la magnitud de la fuerza.

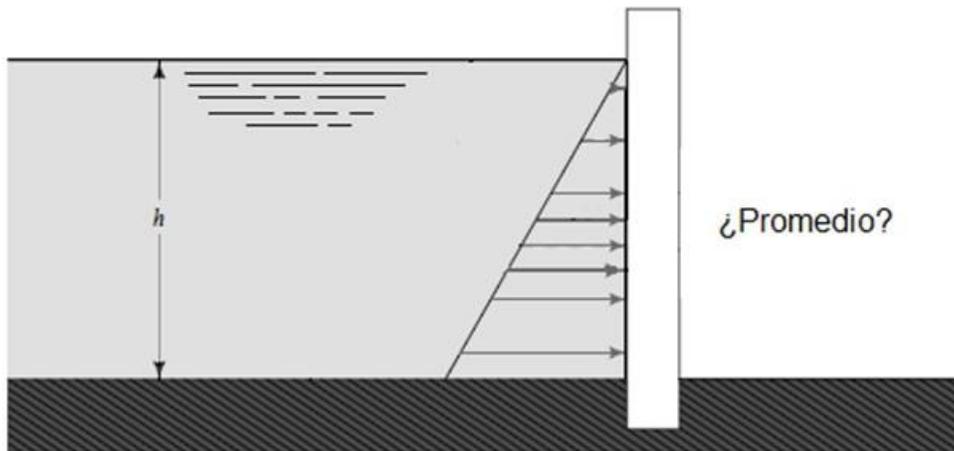


Figura 18: Perfil de fuerzas distribuidas sobre muros verticales

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow \text{Calcular } F$$

$$P = \frac{\int_{h_i}^{h_f} P(h) dh}{h_f - h_i} = \frac{\int_0^h \rho g h dh}{h - 0} = \frac{\rho g \int_0^h h dh}{h} = \frac{\rho g}{h} * \frac{h^2}{2} = \frac{\rho g h}{2}$$

Luego, P promedio nos permite calcular la fuerza resultante que representa la fuerza total que actuaría sobre la pared.

La fuerza resultante total es F_R

$$F_R = P_{prom} * A = \gamma \left(\frac{h}{2} \right) A$$

Sin embargo, $h/2$ no ofrece el centro de presión, ya que, claramente la región (el área) por sobre y bajo $h/2$ difieren.

Para determinar el centro de presión puede calcularse esto de forma análoga al centro de gravedad de un triángulo rectángulo de masa " M ", base " B " y altura " H ".

La masa del triángulo $M = \sigma * A = \sigma \left(\frac{B*H}{2} \right)$, donde σ es la densidad por unidad de área. La coordenada " x " del centro de gravedad es:

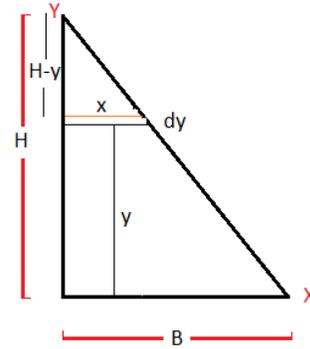
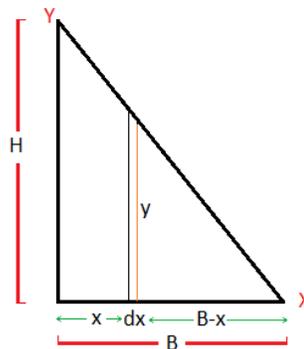
$$x_G = \frac{\iint x \, dm}{M} \rightarrow dm = \sigma y dx$$

Luego

$$x_G = \frac{\iint x \sigma y dx}{M}$$

además

$$\frac{H}{B} = \frac{y}{B-x} \rightarrow y = \frac{H}{B} (B-x)$$



Por lo tanto:

$$x_G = \frac{1}{M} \iint x \sigma \frac{H}{B} (B-x) dx = \frac{\sigma H}{MB} \int_0^B (Bx - x^2) dx = \frac{\sigma H 2}{\sigma B H B} \int_0^B (Bx - x^2) dx$$

$$x_G = \frac{2}{B^2} \left(\frac{Bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^B = \frac{2}{B^2} \left(\frac{B^3}{2} - \frac{B^3}{3} \right) = \frac{2}{B^2} \left(\frac{3B^3 - 2B^3}{6} \right) = \frac{B}{3}$$

$$x_G = \frac{B}{3}$$

Análogamente, para determinar y_G se usa la proporción:

$$\frac{H-y}{x} = \frac{H}{B}$$

Se sigue cumpliendo que: $M = \sigma * A = \sigma \left(\frac{B \cdot H}{2}\right)$,

$$y_G = \frac{1}{M} \iint y \sigma x dy$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint y \sigma \frac{B}{H} (H - y) dy = \frac{\sigma B}{MH} \int_0^H (Hy - y^2) dy = \frac{\sigma B^2}{\sigma B H H} \int_0^H (Hy - y^2) dy$$

$$y_G = \frac{2}{H^2} \left(\frac{Hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^H = \frac{2}{H^2} \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right) = \frac{2}{H^2} \left(\frac{3H^3 - 2H^3}{6} \right) = \frac{H}{3}$$

$$y_G = \frac{H}{3}$$

De este modo se tiene el centro de presión a una altura "h/3" del fondo.

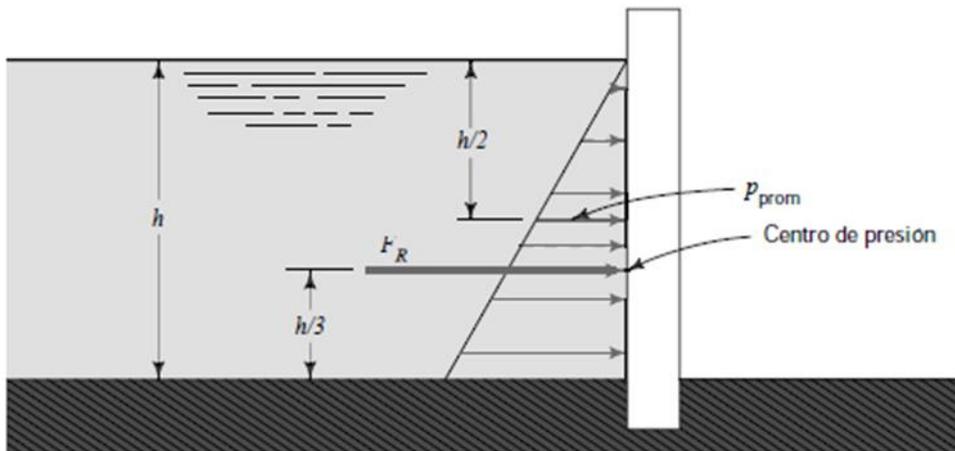


Figura 19: centro de presión

Problema 9:

Sea el líquido de la figura anterior ($sg=0,68$) y sea la profundidad de 12 pies. La pared tiene 40 pies de ancho. Calcule la magnitud de la fuerza resultante sobre la pared y la ubicación del centro de presión.

Solución:

$$9.81 \frac{KN}{m^3} = 62.4 \frac{lb}{ft^3}$$

$$\gamma = sg * \gamma_w = 0.68 * 62.4 \frac{lb}{ft^3} = 42.4 \frac{lb}{ft^3}$$

$$A = 12 ft * 40 ft = 480 ft^2$$

$$F_R = 42.4 \frac{lb}{ft^3} * 480 ft^2$$

$$F_R = 122,000 lb$$

El centro de presión está a $12 ft/3 = 4 ft$ del fondo de la pared.

Problema 10:

Sea la pared inclinada de 30.5 m de ancho que contiene agua dulce con un tirante de 8 m. El ángulo de inclinación de la cortina a la presa es de 60° . Calcule la magnitud de la fuerza resultante sobre la presa y la ubicación del centro de presión.

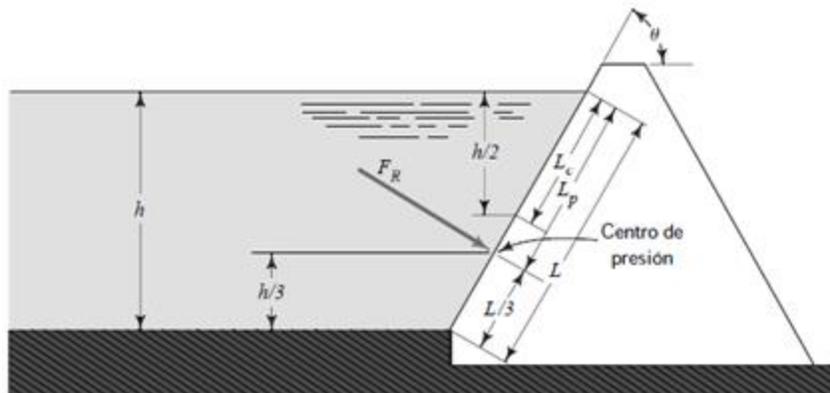


Figura 20: Pared Inclinada

Solución:

Nota: Notar que F_R actúa perpendicular a la pared.

$$\text{sen } \theta = \frac{h}{L}$$

$$L = \frac{h}{\text{sen } \theta} = \frac{8 m}{\text{sen } 60^\circ} = 9.24 m$$

$$A = 9.24 m * 30.5 m = 281,8 m^2$$

$$F_R = \gamma \frac{h}{2} A = 9,81 \frac{KN}{m^3} \cdot \frac{8m}{2} \cdot 281,8m^2 = 11060KN = 11,06MN$$

2.2 Áreas planas sumergidas

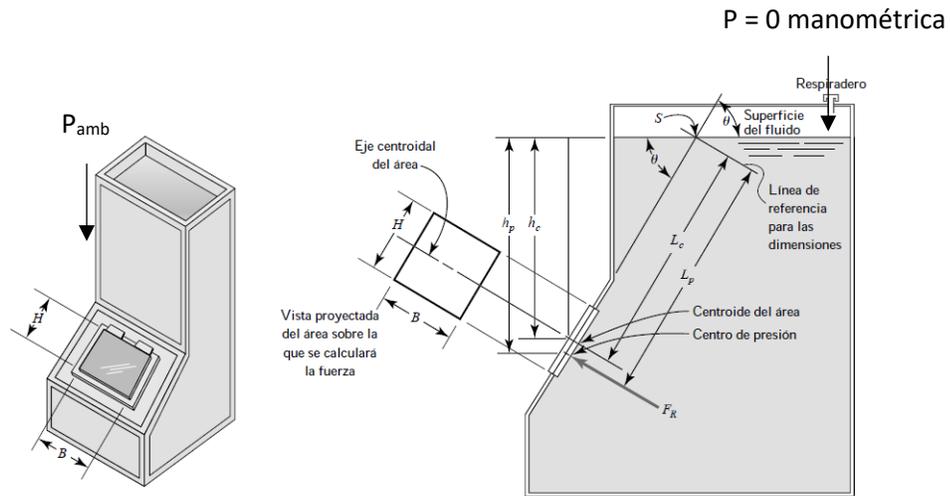


Figura 21: áreas sumergidas

$$h_c = L_c \text{sen}\theta \longrightarrow$$

$$F_R = \gamma h_c A$$

$A =$ Área sobre la que se determina la fuerza

$$L_p = L_c + \frac{I_c}{L_c A} \rightarrow L_p - L_c = \frac{I_c}{L_c A} \longrightarrow$$

$I_c =$ Momento inercia

$$h_p = L_p \text{sen}\theta$$

$$h_p = h_c + \frac{I_c * \text{sen}^2\theta}{h_c A}$$

Momento de inercia

$$I(m) = I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I(A) = I = \int (x^2 + y^2) dA$$

Problema 11:

El tanque contiene aceite lubricante con gravedad específica de 0,91. La pared está inclinada en 60° donde existe una compuerta rectangular con dimensiones $B = 4$ pies y $H = 2$ pies. El centroide de la compuerta se encuentra a una profundidad de 5 pies de la superficie del aceite, determine

- La magnitud de la fuerza resultante F_R sobre la compuerta.
- La ubicación del centro de presión.

Solución:

$$h_c = 5 \text{ ft}$$

$$L_c = \frac{h_c}{\text{sen } 60} \rightarrow L_c = 5,77 \text{ ft}$$

$$A = B * H = 4 \text{ ft} * 2 \text{ ft} = 8 \text{ ft}^2$$

$$F_R = \gamma_{ac} * h_c A$$

$$F_R = sg * \gamma_w * h_c A$$

$$F_R = 0,91 * 62,4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} * 5 \text{ ft} * 8 \text{ ft}^2$$

$$F_R = 2,27 \text{ lb}$$

$$I_c = \frac{BH^3}{12} = \frac{4 \text{ ft} * (2 \text{ ft})^3}{12} = 2,67 \text{ ft}^4$$

$$L_p = L_c + \frac{I_c}{L_c A} = 5,77 \text{ ft} + \frac{2,67 \text{ ft}^4}{5,77 \text{ ft} * 8 \text{ ft}^2} = 5,828 \text{ ft}$$

$$L_p - L_c = 0,058 \text{ ft}$$

2.2.1 Desarrollo general del procedimiento de cálculo de fuerzas y centros de presión de superficies planas sumergidas

Para cualquier área dA , existe una fuerza dF que actúa perpendicular a ella, debido a la presión "P" del fluido. Pero la presión a cualquier profundidad "h" en un líquido estático de peso específico "γ" es:

$$P = \gamma h$$

Luego

$$dF = p dA = \gamma h dA, \quad \text{con } h = y \text{sen } \theta$$

Si el área esta inclinada en "θ" conviene trabajar en su plano, donde "y" se mide desde la superficie del fluido, a lo largo del ángulo de inclinación. Entonces,

$$dF = \gamma(y \text{sen } \theta) dA$$

La suma de las fuerzas en la superficie de estudio se obtiene integrando sobre el área:

$$F_R = \int_A dF = \int_A \gamma(y \text{sen } \theta) dA = \gamma \text{sen } \theta \int_A y dA$$

Luego

$$F_R = \gamma \cdot \text{sen } \theta (L_c A), \quad h_c = L_c \text{sen } \theta$$

$$F_R = \gamma h_c A$$

Para calcular el centro de presión, se estima el momento "M" para cada diferencial de fuerza F con respecto al eje en estudio:

$$dM = dFy, \text{ perod } F = \gamma(y \text{sen} \theta) dA$$

$$dM = \gamma \gamma (y \text{sen} \theta) dA = \gamma \text{sen} \theta (y^2 dA)$$

Dado que F_R , actúa sobre el centro de presión, su momento con respecto al eje a través de S es $F_R L_P$, luego:

$$\int dM = F_R L_P = \int_S \gamma \text{sen} \theta (y^2 dA) = \gamma \text{sen} \theta \int_S y^2 dA$$

Momento de Inercia I de toda el área respecto al eje desde el que se mide y, se define por la integral

Luego

$$F_R L_P = \gamma \text{sen} \theta (I)$$

$$L_P = \frac{\gamma \text{sen} \theta (I)}{F_R} = \frac{\gamma \text{sen} \theta}{\gamma \text{sen} \theta (L_c A)} = \frac{I}{L_c A}$$

Usando el teorema de transferencia del momento de inercia se obtiene:

$$I = I_c + AL_c^2 \quad I = \int [(x' + x_{cm})^2 + (y' + y_{cm})^2] dA$$

$$I(A) = I_c A D^2$$

Donde I_c es el momento de inercia del área de interés con respecto de su propio eje centroidal y L_c es la distancia del eje de referencia al centroide.

De este modo:

$$L_P = \frac{I}{L_c A} = \frac{I_c + AL_c^2}{L_c A} = \frac{I_c}{L_c A} + L_c$$

Finalmente,

$$L_p - L_c = \frac{I_c}{L_c A}$$

Además,

$$h_p = L_p \text{sen} \theta$$

$$L_c = \frac{h_c}{\text{sen} \theta}$$

$$h_p = L_p \text{sen}\theta = \text{sen}\theta \left[\frac{h_c}{\text{sen}\theta} + \frac{I_c}{\left(\frac{h_c}{\text{sen}\theta}\right)A} \right]$$

$$h_p = h_c + \frac{I_c \text{sen}^2\theta}{h_c A}$$

2.2.2 Carga piezométrica

En todos los problemas hemos realizado el desarrollo pensando en un sistema abierto a P atmosférica, y por lo tanto a P manométrica superficial equivalentemente nulo ($p = 0$). Si existe una presión distinta de la ambiental en la superficie, se define una carga piezométrica figura 22, para el cálculo donde esta presión adicional “ P_a ” se traduce en profundidad equivalente del fluido “ h_a ”.

$$h_a = \frac{P_a}{\gamma}$$

Así, se redefine las dimensiones de la profundidad del sistema

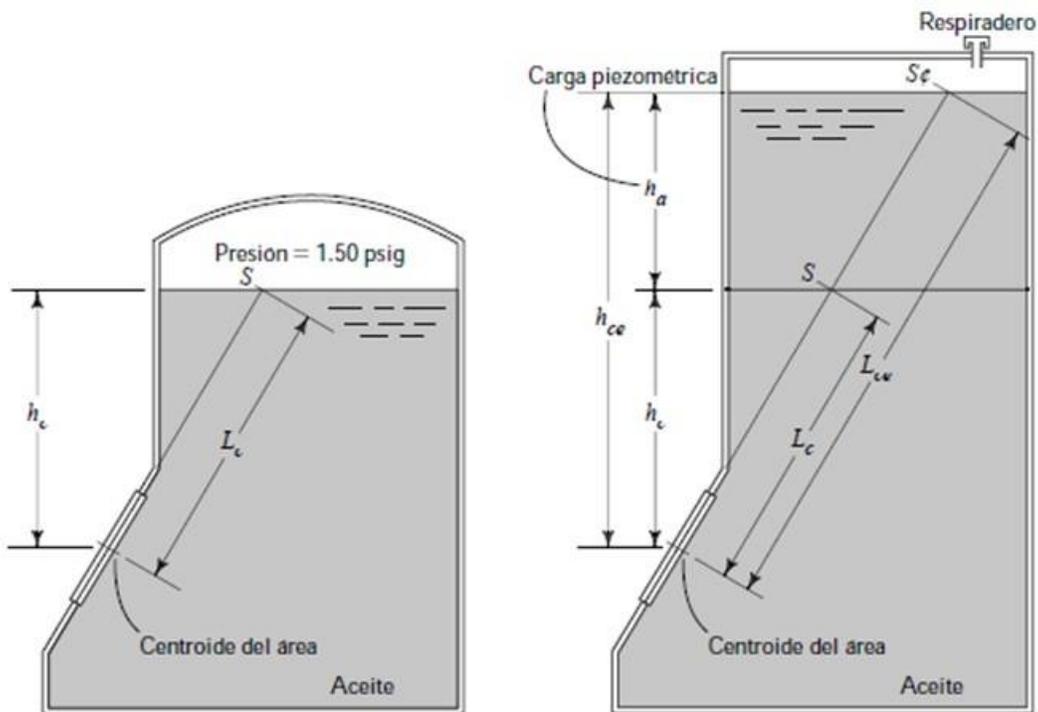


Figura 22: carga piezométrica

2.2.3 Distribución de la fuerza sobre una superficie curva sumergida

En este problema interesa la presión de fluido ejercida sobre superficies curvas figuras 23 y 24

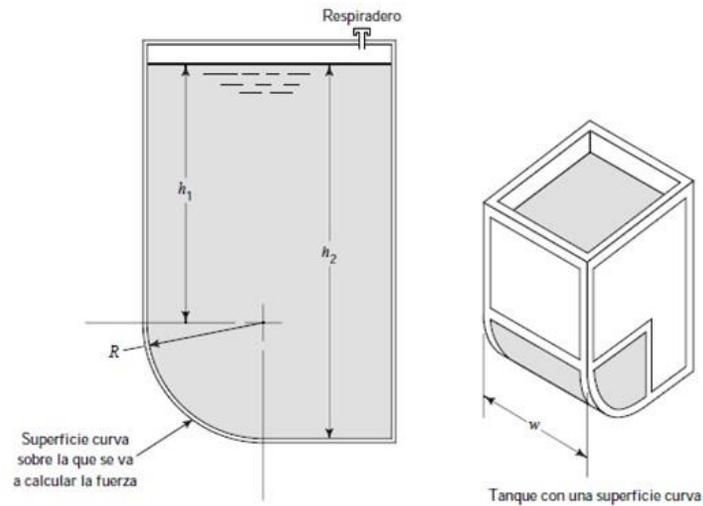


Figura 23: superficies curvas sumergidas

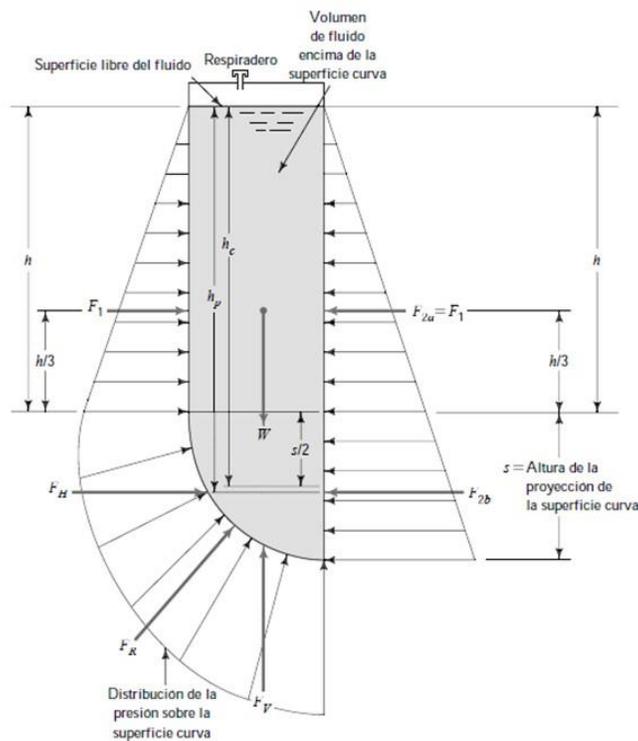


Figura 24: superficies curvas sumergidas

$$F_H = F_2 b$$

$$F_2 b = \gamma h_c * A_{2b}$$

$$h_c = h + \frac{s}{2}$$

$$A_{2b} = sw(\text{desde el lado } F_2 b)$$

$$h_p - h_c = \frac{I_c}{h_c A_{2b}}$$

$$h_p - h_c = \frac{ws^3}{12h_c sw} = \frac{s^2}{12h_c}$$

F_v se opone al peso del fluido y $\sum F = 0$, luego

$$F_v = \gamma(\text{volumen}) = \gamma \frac{A * w}{\downarrow \text{Volumen}} \longrightarrow$$

Área de la sección transversal total (toda la figura)

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_v^2}$$

$$\varphi = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{F_v}{F_H} \right)$$

φ : Angulo de la fuerza F_R respecto al eje horizontal.

Problema 12

Sean las siguientes dimensiones

$$h_1 = 3,00 \text{ m}$$

$$h_2 = 4,50 \text{ m}$$

$$w = 2,5 \text{ m}$$

$$\gamma = 9,81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} (\text{agua})$$

Calcular F_H y F_v de F_R sobre la superficie curva.

Solución:

En este problema $R = s$

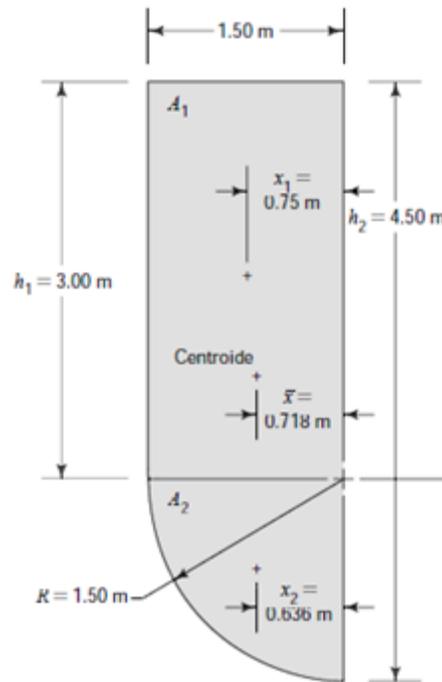
$$\text{Área} = A_1 + A_2 = h_1 R + \frac{1}{4} \pi R^2$$

$$\text{Área} = 6,267 \text{ m}^2$$

$$\text{Volumen} = A * w = 15,67 \text{ m}^3$$

$$\text{Peso} = \gamma V = 9,81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} * 15,67 \text{ m}^3 = 153,7 \text{ kN}$$

$F_v = 153,7 \text{ kN}$ y actúa hacia arriba a través del centroide de volumen.



La ubicación del centroide \bar{x} se calcula por medio de la determinación de los centroides de A_1 y A_2 (x_1, y_1):

$$x_1 = \frac{1}{2}R = 0,75 \text{ m}$$

$$x_2 = 0,424 R = 0,424 * 1, \text{ m} = 0,636 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{4,5 * 0,75 + 1,767 * 0,636}{4,5 + 1,767} = 0,718 \text{ m}$$

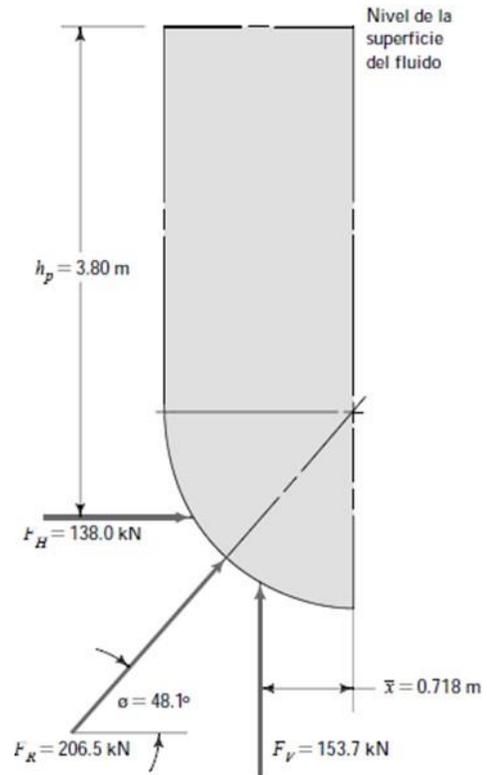
$$h_c = h_1 + \frac{s}{2} = 3 \text{ m} + \frac{1,5 \text{ m}}{2} = 3,75 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} F_H &= \gamma s w * \left(h_1 + \frac{s}{2} \right) = \gamma s w h_c \\ &= 9,81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} * 1,5 \text{ m} * 2,5 \text{ m} * 3,75 \text{ m} \\ &= 138 \text{ kN} \end{aligned}$$

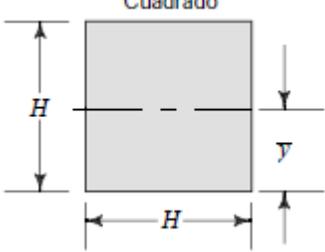
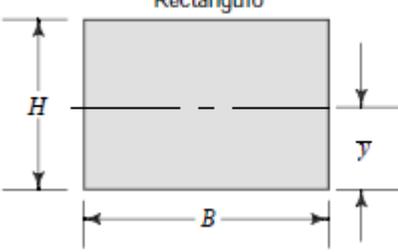
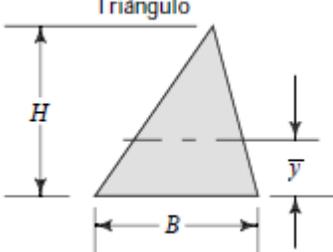
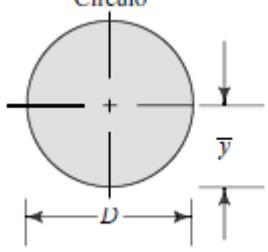
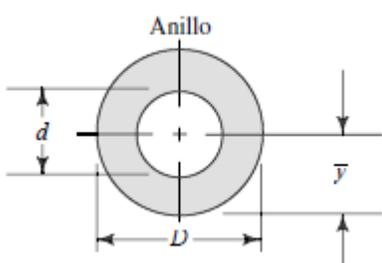
$$h_p = h_c + \frac{s^2}{12 h_c} = 3,75 \text{ m} + \frac{1,5^2}{12 * 3,75} = 3,8 \text{ m}$$

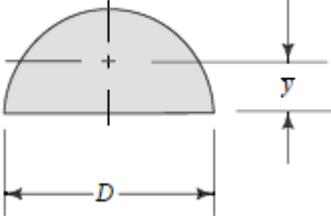
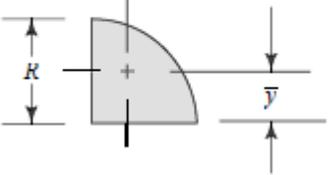
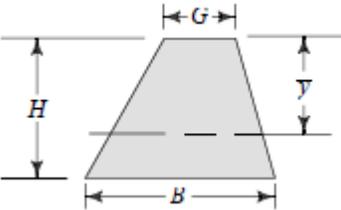
$$F_R = \sqrt{F_v^2 + F_H^2} = \sqrt{153,7^2 + 138^2} = 206,5 \text{ kN}$$

$$\varphi = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{F_v}{F_H} \right) = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{153,7}{138} \right) = 48,1^\circ$$



Propiedades de las áreas

Sección	Área de sección	Distancia al eje \bar{y} centroidal	Momento de inercia respecto al eje centroidal I_c
<p>Cuadrado</p> 	H^2	$\frac{H}{2}$	$\frac{H^4}{12}$
<p>Rectángulo</p> 	BH	$\frac{H}{2}$	$\frac{BH^3}{12}$
<p>Triángulo</p> 	$\frac{BH}{2}$	$\frac{H}{3}$	$\frac{BH^3}{36}$
<p>Círculo</p> 	$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi D^4}{64}$
<p>Anillo</p> 	$\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$

<p style="text-align: center;">Semicírculo</p> 	$\frac{\pi D^2}{8}$	$0.212D$ $0.424R$	$6.86 * 10^{-3} D^4$
<p style="text-align: center;">Cuadrante</p> 	$\frac{\pi D^2}{16} \text{ ó } \frac{\pi R^2}{4}$	$0.212D$ $0.424R$	$3.43 * 10^{-3} D^4$ $5.45 * 10^{-2} R^4$
<p style="text-align: center;">Trapezoide</p> 	$\frac{H(G + B)}{2}$	$\frac{H(G + 2B)}{3(G + B)}$	$\frac{H^3(G^2 + 4GB + B^2)}{36(G + B)}$

Si en el problema anterior, se tuviese una presión adicional o estuviese la superficie presurizada, se agregaría a la profundidad real, una profundidad “ h_a ” equivalente a $\frac{P_a}{\gamma}$. Es el procedimiento ya explicado anteriormente como carga piezométrica. Con esta nueva profundidad se calcula F_H y F_V .

2.2.4 Fuerza sobre una superficie curva con fluido debajo de ella

Se han analizado superficies curvas con fluidos sobre ella. Consideraremos ahora el problema con superficies curvas con fluidos bajo ellas, sometidos a presión. La presión del fluido en la superficie genera fuerzas.

La superficie por su parte generaría fuerzas de reacción, hacia abajo y la izquierda, sobre el fluido contenido

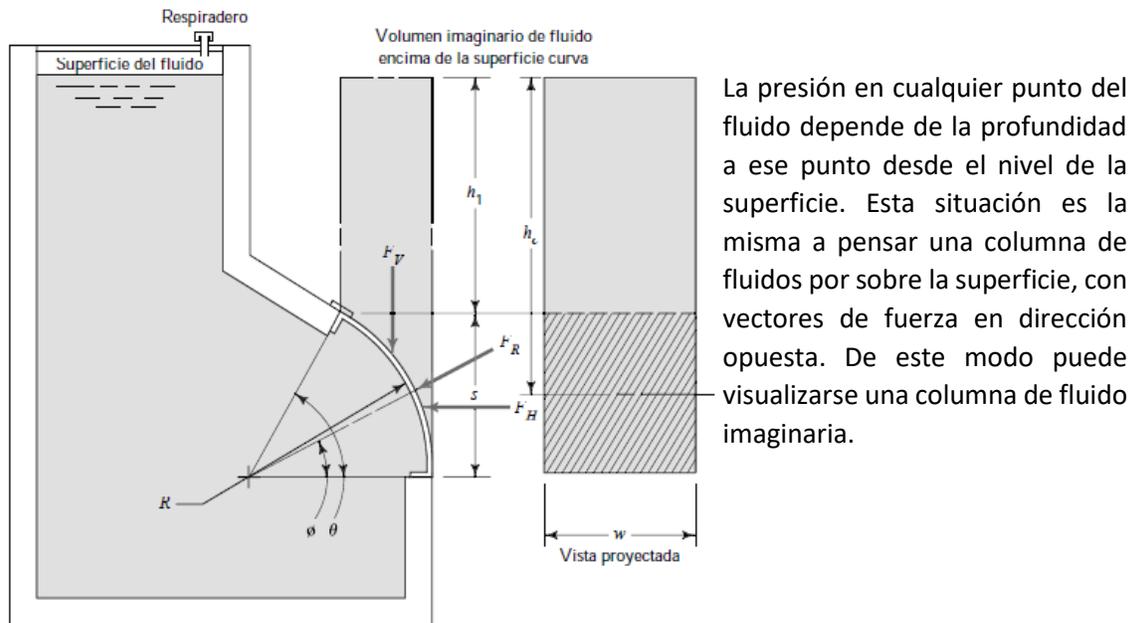


Figura 25: Superficies curvas con fluido bajo ellas

También pueden imaginarse compuertas semicilíndricas que se proyectan hacia el interior de un tanque que contiene aceite (figura 26), por ejemplo: La fuerza producida por la presión del fluido tendría un componente horizontal que actúa a la derecha de la compuerta. Esta fuerza actúa sobre la proyección de la superficie sobre el plano vertical y se calcula con los métodos ya vistos.

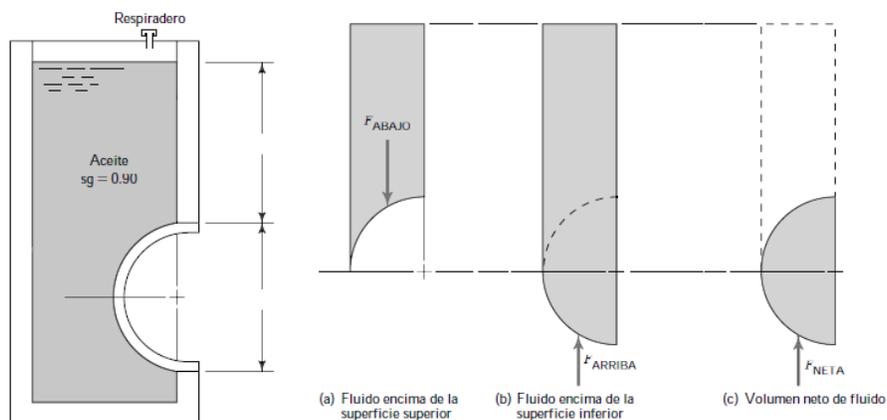


Figura 26: compuerta semicilíndrica sumergida

En dirección vertical, la fuerza sobre la parte superior de la compuerta actuaría hacia abajo y sería igual al peso del aceite sobre ella.

Sin embargo, hay una fuerza que actúa hacia arriba en el fondo de la compuerta, que es igual al peso total sobre ella de fluido, (real + imaginario) La fuerza vertical neta es la diferencia de las dos fuerzas y es igual al peso del volumen semicilíndrico del fluido desplazado por la compuerta misma como muestra la figura anterior.

Problema 13:

El tanque de la figura 27 contiene mercurio, de gravedad específica ($sg = 13,54$). La pared está inclinada en $\phi = 70^\circ$, donde existe una compuerta cuadrada de arista 4 pies. El centroide de la compuerta se encuentra a una profundidad de 9 pies de la superficie. El tanque está abierto y sometido a presión atmosférica.

- Calcule la magnitud de la fuerza resultante F_r sobre la compuerta
- Determine la profundidad (h_p) del centro de presión.

Datos:

$$I_c = \frac{H^4}{12}$$

$$L_p = L_c + \frac{I_c}{L_c * A} \quad ; \quad \gamma_{agua} = 62,4 \left[\frac{lb}{pie^3} \right]$$

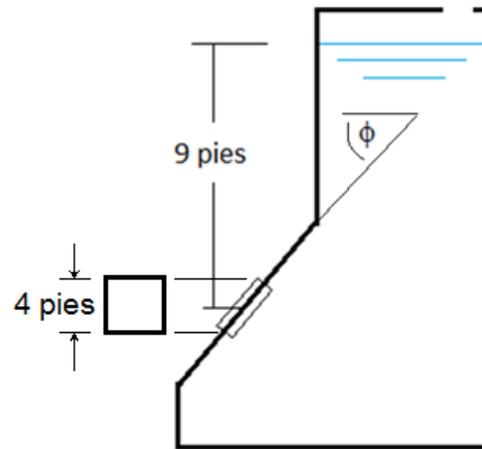


Figura 27: Tanque que contiene Mercurio

Solución

$$a) \quad F_r = \gamma_{agua} * sg_{Hg} * h_c * A = 62,4 \frac{lb}{pie^3} * 13,54 * 9 \text{ pies} * 16 \text{ pie}^2$$

$$F_r = 121665 \text{ lb}$$

b) Dado que $h_c = L_c * \text{sen}\phi$ y $h_p = L_p * \text{sen}\phi$ fácilmente se usa $L_p = L_c + \frac{I_c}{L_c * A}$ y se obtiene:

$$h_p = h_c + \frac{I_c * \text{sen}^2\phi}{h_c * A} = h_c + \frac{H^4}{12} * \frac{\text{sen}^2\phi}{h_c * A}$$

$$h_c = 9 \text{ pies}; \quad A = 16 \text{ pie}^2; \quad H = 4 \text{ pies} \quad \text{y} \quad \phi = 70^\circ$$

$$h_p = 9 \text{ pie} + \frac{\frac{4^4}{12} [\text{pie}^4] * \text{sen}^2 70^\circ}{9 \text{ pie} * 16 \text{ pie}^2}$$

$$h_p = 9,13 \text{ pies}$$

2.3 Flotabilidad y Estabilidad

Cualquier cuerpo que flote o esté sumergido por completo en un fluido está sujeto a una fuerza de flotación, la flotación es una fuerza de empuje por parte del fluido en dirección vertical hacia arriba.

Se define estabilidad como la capacidad que tiene un cuerpo de retornar a su posición de equilibrio después de inclinarse producto de alguna perturbación.

La fuerza de flotación tiende a elevar objetos sumergidos en un fluido o como apoyo a aquellos que flotan. El peso en cambio tiende a hundirlos. Evidentemente, es un tema de densidades relativas entre el cuerpo y el fluido el establecer si el cuerpo flota o se hunde en el fluido. Un submarino está diseñado de modo que puede ajustar su lastre y navegar a cualquier profundidad, condición conocida como flotabilidad neutral.

2.3.1 Flotabilidad

Un cuerpo en un fluido ya sea que este flote o esté sumergido, experimenta una fuerza hacia arriba igual al peso del fluido que desplaza.

La fuerza de flotación actúa en dirección vertical hacia arriba a través del centroide del volumen desplazado y se define por medio del principio de Arquímedes:

$$F_b = \gamma_f V_d$$

Donde:

F_b : fuerza de flotación

γ_f = peso específico del fluido

V_d : volumen de fluido desplazado

Cuando un cuerpo flota libremente, desplaza el volumen suficiente de fluido para balancear su propio peso. Luego se requiere condiciones de equilibrio estático en la vertical para el análisis de estos problemas.

$$\sum F_v = 0$$

Si el objeto está en reposo en el fluido.

Se considera positivo hacia arriba. El peso del sólido es $W = \gamma_s \cdot V_s$ donde V_s es su volumen total. La flotabilidad neutral ocurre cuando la posición del cuerpo en el fluido es invariante. Se logra cuando

$$\gamma_s = \gamma_f$$

Problema 14:

Un cubo con aristas de 0,5 m, este hecho de bronce y tienen un peso específico de $86,9 \text{ kN/m}^3$.
 Figura 28, determine la magnitud y dirección de la fuerza que se requiere para mantener al cubo en equilibrio completamente sumergido (e) en agua y (b) en mercurio.

Solución:

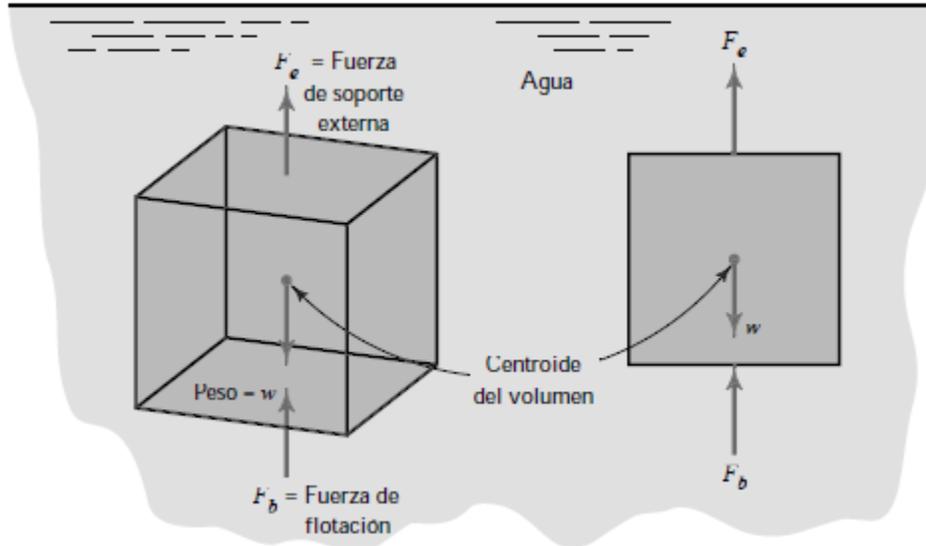


Figura 28: cubo sumergido

a) En agua

$$\sum F_v = 0$$

$$\therefore F_b + F_{ext} - w = 0$$

$$F_{ext} = w - F_b$$

$$w = \gamma_B * V_B = 86,9 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} * (0,5 \text{ m})^3 = 10,86 \text{ kN}$$

$$F_b = \gamma_f * V_d = 9,81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} * 0,125 \text{ m}^3 = 1,23 \text{ kN}$$

$$F_{ext} = 10,86 \text{ kN} - 1,23 \text{ kN} = 9,63 \text{ kN}$$

Luego se requieren 9,63 kN para tener al cubo sumergido en equilibrio en agua, en dirección hacia arriba (vertical).

b) En mercurio

$$F_b = \gamma_m * V_d = (\gamma_w * s_{gm}) * V_d = 13,54 * 9,81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} * 0,125 \text{ m}^3 = 16,6 \text{ kN}$$

$$F_e = w - F_b$$

$$F_e = 10,86 \text{ kN} - 16,6 \text{ kN} = -5,74 \text{ kN}$$

Esto quiere decir que, se requiere F_e en dirección vertical hacia abajo, de magnitud 5.74 kN

$$\gamma_w = 9,81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_B = 86,9 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_{Hg} = 132,7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

Dado que $\gamma_B < \gamma_m$, sin una fuerza externa el cubo en mercurio tendería a flotar.

Problema 15:

Un objeto metálico posee un volumen difícil de calcular por geometría tradicional dada su forma irregular, se decide utilizar el principio de flotabilidad para determinar su volumen y peso específico, ver figura 29.

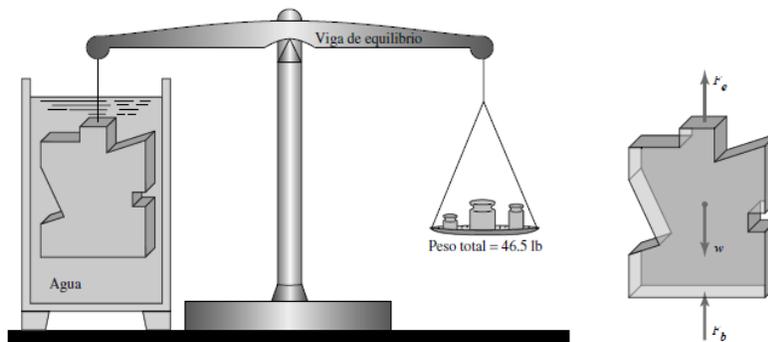


Figura 29: diagrama experimental

Solución:

Se sabe que el peso del objeto es 60 lb (se pesa). Se sumerge en agua y se determina su peso aparente como se ilustra en la figura

$$w = 60 \text{ lb}$$

$$F_{ext} = 46,5 \text{ lb}$$

$$\sum F_v = 0$$

$$F_b + F_e - w = 0$$

$$F_b = \gamma_f * V_d$$

$$V_d = V_s$$

$$V_d = \text{Vol. desplazado}$$

$$V_s = \text{Vol. solido}$$

$$\gamma_f * V_s + F_e - w = 0 \rightarrow V_s = \frac{w - F_e}{\gamma_f} = \frac{60 \text{ lb} - 46.5 \text{ lb}}{62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}} = 0,216 \text{ ft}^3$$

$$\gamma_s = \frac{w}{V_s} = \frac{60 \text{ lb}}{0,216 \text{ ft}^3} = 278 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$$

El cual da el peso específico aproximado de una pieza de titanio.

Problema Propuesto:

Un cubo de arista 80 mm está construido de espuma de hule y flota en agua con 60 mm de su cuerpo bajo la superficie. Calcule la magnitud de la fuerza en Newton que requiere para sumergirlo en glicerina, el cual tiene un peso específico (sg) de 1,26.

2.3.2 Estabilidad de cuerpos sumergidos por completo

Un cuerpo en un fluido se considera estable si regresa a su posición original después de ser perturbado de su posición de equilibrio sobre un eje horizontal. Los globos aerostáticos y submarinos son buenos ejemplos del caso. Es deseable que mantengan siempre una orientación específica. La condición de estabilidad para cuerpos sumergidos radica en que su centro de gravedad este por debajo de su centro de flotabilidad. El centro de flotabilidad de un fluido se encuentra en el centroide del volumen desplazado de fluido y es a través de dicho punto que la fuerza de flotación actúa en dirección vertical, el peso del cuerpo actúa hacia abajo a través del centro de gravedad.

C_b = Centro de flotación.

C_g = Centro de gravedad.

M_c = Metacentro

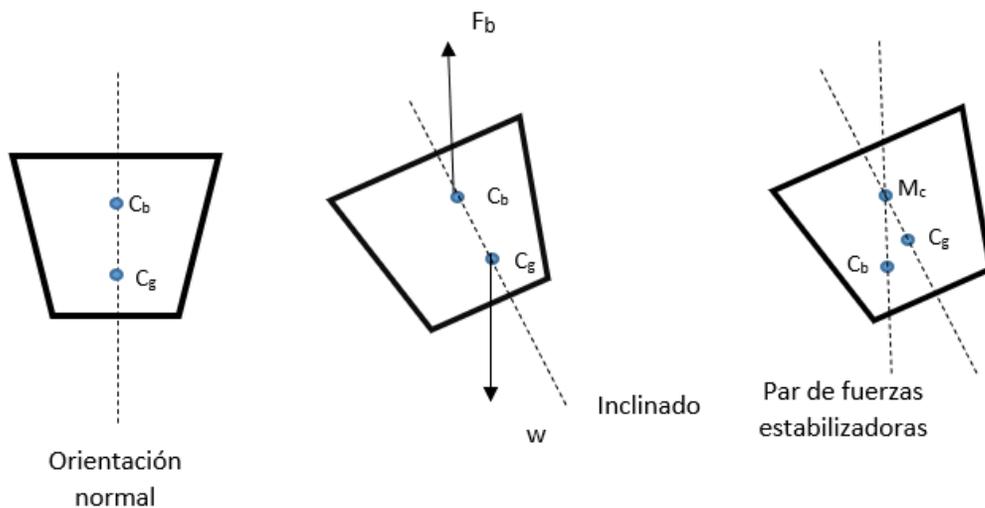


Figura 30: estabilidad de cuerpos sumergidos

En objetos solidos C_b y C_g coinciden por lo que muestran estabilidad neutral al estar sumergidos por completo, por lo que tienden a permanecer en cualquier posición que se les coloque (sumergidos por completo). La línea vertical que pasa por C_b y C_g en orientación vertical se conoce como “eje vertical del cuerpo”.

Al inclinar el cuerpo flotante el centro de flotabilidad cambia a una nueva posición dado que se modifica la geometría del volumen desplazado. La fuerza flotante “ F_b ” y el peso “ w ” produce un par estabilizador que tiende a devolver el cuerpo a su posición original.

Se define el metacentro “ M_c ”, como la interacción del eje vertical de un cuerpo cuando está en su posición de equilibrio, con una línea vertical que pasa a través de la posición nueva del centro de flotación C_b cuando el cuerpo gira levemente.

Un cuerpo flotante es estable si su centro de gravedad está por debajo del metacentro.

Es posible demostrar en forma analítica si un cuerpo flotante es estable al calcular la posición de su metacentro. La distancia al metacentro a partir del centro de flotación se conoce como MB y se calcula por

$$MB = \frac{I}{V_d}$$

Donde:

- V_d = Volumen desplazado del fluido.
- I = Momento de inercia mínimo de una sección horizontal de un cuerpo tomada desde la superficie del fluido.

Problema 16:

El casco de una barcaza cargada por completo pesa 150 kN, determinar si el cuerpo es estable en agua dulce ver figura 31

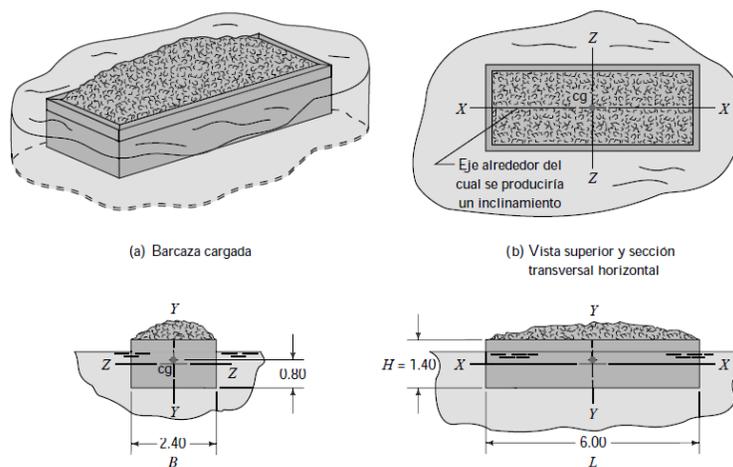


Figura 31: vistas de barcaza cargada

Solución:

$$\sum F_v = 0 = F_b - w$$

$$w = F_b$$

$$F_b = \gamma_f * V_d = \gamma_f * BLX = w$$

$$X = \frac{w}{BL\gamma_f} = \frac{150 \text{ KN}}{2.4 \text{ m} * 6 \text{ m} * 9.81 \frac{\text{KN}}{\text{m}^3}} = 1,06 \text{ m}$$

Al ser 1.06 m menor que 1.4 m significa que la barcaza flota.

Ahora se busca el centro de flotación

Se encuentra en el centro del volumen desplazado de agua, sobre el eje vertical de la embarcación a 0,53 m del fondo (mitad del calado).

además $y_{cg} = 0,8 \text{ m}$

Debe calcularse el momento "Mc"

$$MB = \frac{I}{V_d}$$

$$V_d = LBX = 6 \text{ m} * 2.4 \text{ m} * 1.06 \text{ m} = 15.26 \text{ m}^3$$

El momento de inercia "I" se calcula respecto al eje x-x

$$I = \frac{LB^3}{12} \longrightarrow$$

Momento inercia de un rectángulo

$$I = \frac{6 \text{ m} * (2,4 \text{ m})^3}{12} = 6,91 \text{ m}^4$$

$$MB = \frac{6.91 \text{ m}^4}{15.26 \text{ m}^3} = 0.45 \text{ m}$$

$$y_{mc} = y_{cb} + MB = 0.53 \text{ m} + 0.45 \text{ m} = 0,98 \text{ m}$$

$$y_{mc} > y_{cg}$$

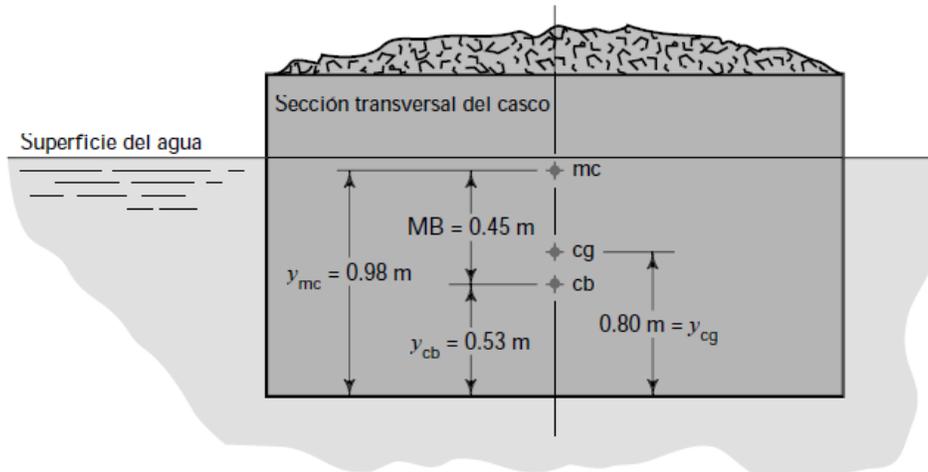


Figura 32: diagrama de alturas de barcaza cargada

Problema17:

Un cilindro sólido mide 3 pies de diámetro, 6 pies de altura y pesa 1550 lb. Si el cilindro estuviera puesto en aceite ($\text{sg} = 0.9$) a lo largo de su eje vertical ¿sería estable?

Solución:

$$V_d = A * X = \frac{\pi D^2}{4} * X$$

$$\sum F_v = 0 = F_b - w$$

$$w = F_b = \gamma_a V_d = \gamma_a * \frac{\pi D^2 X}{4}$$

Calado:

$$X = \frac{4w}{\pi D^2 \gamma_a} = \frac{4 * 1550 \text{ lb}}{\pi (3 \text{ ft})^2 * 0.9 * 62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}} = 3.9 \text{ ft}$$

$$y_{cb} = \frac{x}{2} \text{ del fondo del cilindro}$$

$$y_{cb} = \frac{3.9 \text{ ft}}{2} = 1.95 \text{ ft}$$

Cg esta a H/2 del fondo del cilindro

$$C_g = \frac{6 \text{ ft}}{2} = 3 \text{ ft}$$

$$MB = \frac{I}{V_d} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{\pi(3ft)^2}{4} * 3.9 ft} = \frac{\pi(3ft)^4}{64} = 0,144$$

$$y_{mc} = y_{cb} + MB = 1,95 ft + 0,14 ft = 2,09 ft$$

$$y_{mc} < C_g$$

El cilindro no es estable en esta posición, tendería a caer hacia un lado.

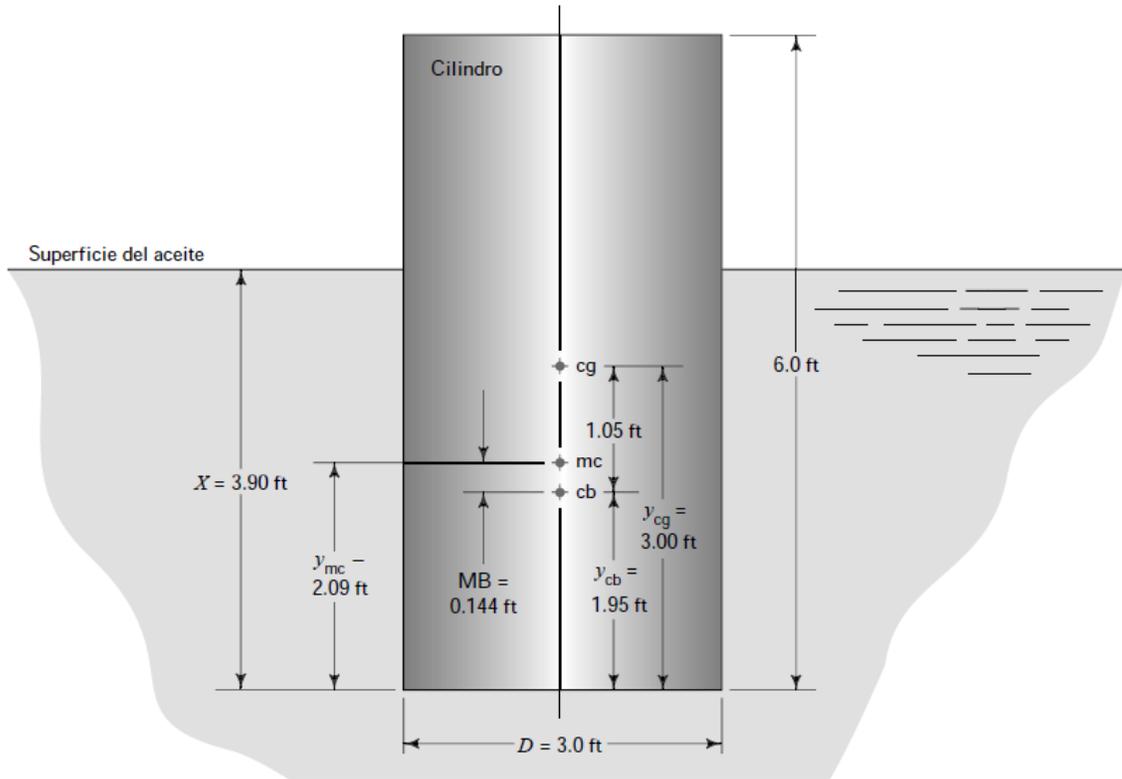


Figura 33: Diagrama de alturas de cilindro sumergido

2.3.2.1 Grado de estabilidad

Algunos objetos son más estables que otro. Una medida de la estabilidad relativa es la altura metacéntrica y se define como la distancia que hay entre el metacentro y el centro de gravedad.

$$MG = y_{mc} - y_{cg}$$

Se recomienda

- Naves pequeñas en océano $MG = 0,46 \text{ m}$
- Naves grandes en océano $MG = 1,07 \text{ m}$

La altura metacéntrica (figura 34) debe ser pequeña para evitar oscilaciones que inducen mareos.

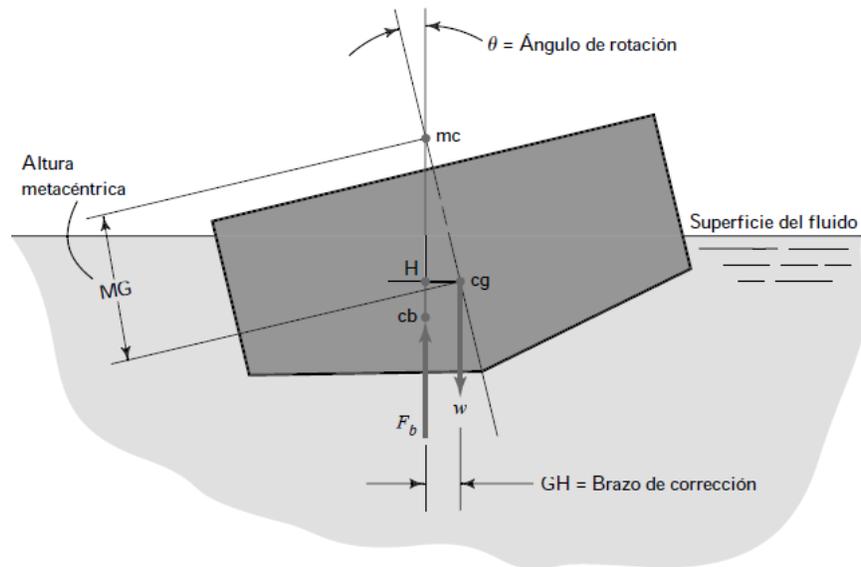


Figura 34: alturas metacéntricas de una embarcación

La distancia \overline{GH} varía al variar el ángulo de rotación θ . Su grafica se conoce como curva de estabilidad estática. Si \overline{GH} es positivo la nave permanece estable. Si \overline{GH} se hace negativo, la embarcación se puede volcar al hacerse inestable y se representa en la figura 35

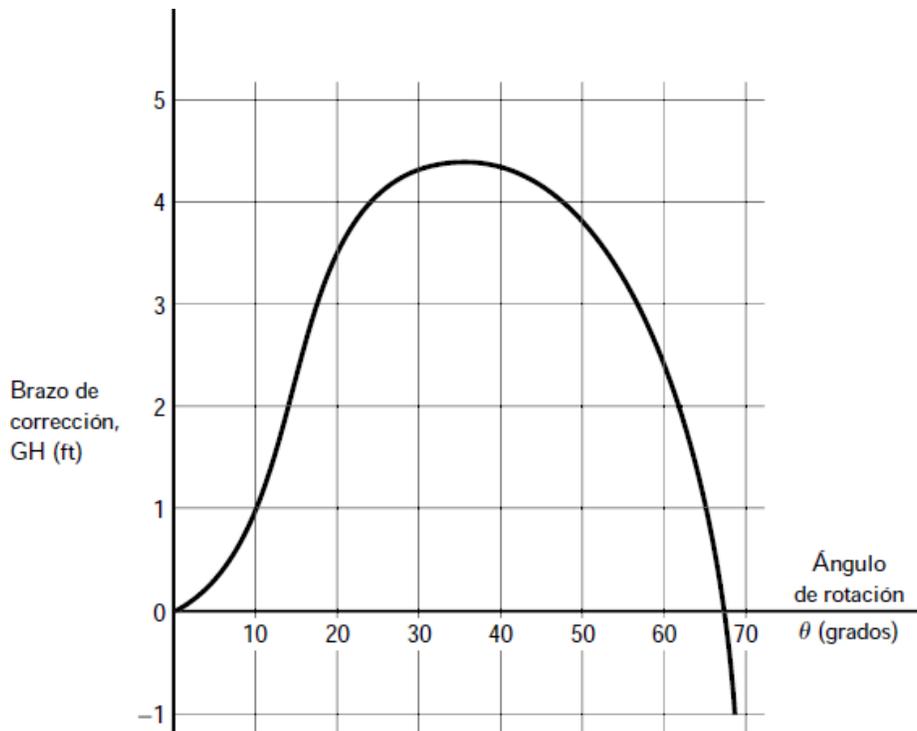


Figura 35: Curva de estabilidad estática de un cuerpo flotante

Problema 18:

El cilindro concéntrico (tubo) de la figura 36, es de pared maciza y flota en agua con un calado de profundidad "P" y su altura es "Q". Se sabe además que está hecho de un material uniforme. La figura 36 indica una pared de espesor de dimensión "h".

- ¿Cuál es el peso específico del cilindro en unidades de $\frac{lb}{pie^3}$?
- ¿Cuál sería su calado si flotase en agua de mar cuya gravedad específica 1,1?

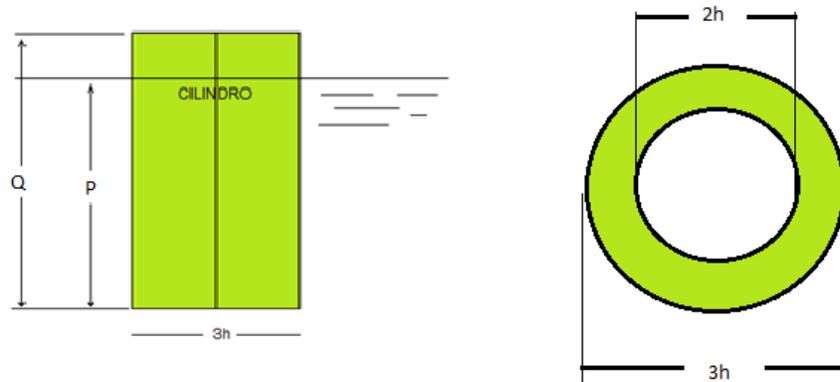


Figura 36: Tubo flotando en agua dulce.

Datos:

$$\gamma_w = 62,4 \frac{lb}{pie^3}, Q = 6 \text{ pie}, P = 5 \text{ pie} \text{ y } h = 3 \text{ pie}$$

Solución:

$$a) \text{ El volumen sumergido es: } \left(\frac{\pi(3h)^2}{4} - \frac{\pi(2h)^2}{4} \right) \cdot P = \frac{5\pi h^2}{4} P$$

$$\text{La fuerza de flotación es: } Fb = \gamma_w \cdot \frac{5}{4} \pi h^2 P$$

El peso del cilindro es:

$$W = \gamma_{sólido} \cdot V_{sólido} = \gamma_{sólido} \cdot Q \cdot \left(\frac{\pi(3h)^2}{4} - \frac{\pi(2h)^2}{4} \right) = \gamma_{sólido} \cdot \frac{5\pi h^2}{4} \cdot Q$$

Dado que hay un equilibrio de fuerzas se sabe que $Fb = w$, luego:

$$\gamma_w \cdot \frac{5\pi h^2}{4} \cdot P = \gamma_{sólido} \cdot \frac{5\pi h^2}{4} \cdot Q$$

Simplificando:

$$\gamma_{sólido} = \frac{P \cdot \gamma_w}{Q} = \frac{5 \text{ pies} \cdot 62,4 \frac{lb}{pie^3}}{6 \text{ pies}}$$

$$\gamma_{sólido} = 52 \frac{lb}{pie^3}$$

b) El volumen sumergido es: $\left(\frac{\pi(3h)^2}{4} - \frac{\pi(2h)^2}{4}\right) \cdot X = \frac{5\pi h^2}{4} X$

La fuerza de flotación es: $F_b = sg * \gamma_w \cdot \frac{5}{4} \pi h^2 X$

El peso del cilindro es:

$$W = \gamma_{solido} * V_{solido} = \gamma_{solido} \cdot Q \cdot \left(\frac{\pi(3h)^2}{4} - \frac{\pi(2h)^2}{4}\right) = \gamma_{solido} \frac{5\pi h^2}{4} * Q$$

Dado que hay un equilibrio de fuerzas se sabe que $F_b = w$, luego:

$$sg * \gamma_w \cdot \frac{5}{4} \pi h^2 X = \gamma_{solido} \frac{5\pi h^2}{4} * Q$$

$$sg * \gamma_w \cdot X = \gamma_{solido} * Q = \frac{P \cdot \gamma_w}{Q} * Q$$

$$sg * X = P$$

$$X = \frac{5,0 \text{ pies}}{1,1} = \frac{50}{11} \text{ pie}$$

$$\text{Volumen sumergido} = \frac{5}{4} \pi (3 \text{ pies})^2 * \frac{50}{11} \text{ pie}$$

$$\text{Volumen sumergido} = \frac{1125}{22} \pi \text{ pies}^3$$

Problema 19:

a) Un cubo de arista "d" flota con un calado de "X". Obtener una expresión que relacione la profundidad sumergida X, el peso específico del cubo (γ_c) y el peso específico del fluido ($3\gamma_c$).

b) Un cuerpo irregular tiene peso específico de 8,2 kN/m³. ¿Qué fracción de su volumen se encuentra flotando sobre la superficie del agua de mar?

Datos: $\gamma(\text{agua}) = 9,81 \frac{kN}{m^3}$, $sg_{am}: 1,05$

Solución:

a)

$$F_b = X \cdot d^2 \gamma_f = \gamma_c \cdot d^3$$

Luego

$$X = d \frac{\gamma_c}{\gamma_f} = d \frac{\gamma_c}{3\gamma_c} = \frac{d}{3}$$

b)

$$F_b = V_{sum} * s\mathcal{G}_{am} * \gamma_{agua}$$

$$Peso = V_T * \gamma_s$$

Luego $V_{sum} * s\mathcal{G}_{am} * \gamma_{agua} = V_T * \gamma_s$

$$\frac{V_{sum}}{V_T} = \frac{\gamma_s}{s\mathcal{G}_{am} \cdot \gamma_{agua}}$$

$$100 * \frac{V_{sum}}{V_T} = 100 * \frac{\gamma_s}{s\mathcal{G}_{am} \cdot \gamma_{agua}} = \%Volumen\ sumergido$$

Finalmente:

$$100 - 100 * \frac{\gamma_s}{s\mathcal{G}_{am} \cdot \gamma_{agua}} = \%Volumen\ emergente$$

$$100 * \left(1 - \frac{8,2 \frac{kN}{m^3}}{1,05 \cdot 9,81 \frac{kN}{m^3}} \right) = 20,39\%$$

Capítulo 3

Dinámica de Fluidos

3.1 El flujo de los fluidos y la ecuación de Bernoulli.

Se estudiará la dinámica de fluidos en ductos o tuberías.

Se define los siguientes conceptos, algunos de ellos ya son conocidos:

Flujo volumétrico o caudal:

$$Q = A \cdot v \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Flujo en peso:

$$W = \gamma \cdot Q \frac{\text{N}}{\text{s}}$$

Flujo másico:

$$\dot{m} = \rho \cdot Q \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Donde “ ρ ” es la densidad, “ A ” es el área transversal de la cañería, v es la velocidad promedio del fluido que circula por la cañería siendo “ γ ” es el peso específico.

3.1.1 Principio de continuidad.

En general se ha aceptado que la masa se conserva. Si el flujo es estable, significa que no hay acumulación o pérdida de materia en el tiempo, por lo que el sistema está en estado estacionario, luego:

$$\dot{m}_{entra} - \dot{m}_{salida} = \frac{\partial m}{\partial t} = 0$$

$$\dot{m}_{entra} = \dot{m}_{salida}$$

O bien:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Si se considera que el fluido es un líquido y se asume que es incompresible, se tiene que se satisface en esta aproximación:

$$\rho_1 = \rho_2$$

Luego se tiene que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Que es equivalente a establecer:

$$Q_1 = Q_2$$

Lo que se considera válido en líquidos a presiones moderadas y se conoce como ecuación de continuidad.

Problema 20:

Suponga un ducto cilíndrico de diámetro (1) 50 mm y (2) 100 mm respectivamente. En (1) fluye agua a 70°C y con una velocidad promedio de $8,0 \frac{m}{s}$. Determine:

- a) La velocidad en la sección 2.
- b) El flujo volumétrico.
- c) Flujo en peso.
- d) Flujo másico.

Dado los datos de temperatura es posible determinar que para agua pura a 70°C el peso específico del agua es $\gamma = \rho \cdot g = 9,59 \frac{kN}{m^3}$

Solución:

a)

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi(50mm)^2}{4} = 1963 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi(100mm)^2}{4} = 7854 \text{ mm}^2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} = 2,0 \frac{m}{s}$$

b)

$$Q_1 = Q_2 = Q = A_1 \cdot v_1 = 1963 \cdot 8 \cdot \frac{1m^2}{(10^3mm)^2} = 0,0157 \frac{m^3}{s}$$

c)

$$W = \gamma \cdot Q = 9,59 \frac{kN}{m^3} \cdot 0,0157 \frac{m^3}{s} = 0,151 \frac{kN}{s}$$

d)

$$\dot{m} = \rho \cdot Q = 978 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,0157 \frac{m^3}{s} = 15,35 \frac{kg}{s}$$

Los tamaños standard de tuberías se denominan por medio de su tamaño nominal y su número de cédula. Los últimos se relacionan con las presiones permisibles de operación en el rango 10-160. Los valores más altos indican espesor de la pared mayor. El tamaño nominal se indica en pulgadas o milímetros.

Sea la línea de succión aquella que lleva un fluido desde un depósito a la toma de una bomba. La línea de descarga conduce el fluido desde la salida de la bomba a los componentes de trabajo. En ocasiones existe una línea de retorno, de existir recirculación de modo que el fluido hidráulico opera en ciclos.

El Apéndice "G" del libro de Mott de Mecánica de Fluidos, se expresan dimensiones de tuberías de acero.

3.1.2 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una ecuación de conservación de la energía.

Los términos de energía ya se han visto en capítulos anteriores:

Se tenía en general:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{entrada} - \dot{W}_{entrada} + \sum \dot{m}_e \left(\frac{1}{2}v_e^2 + gz_e + h_e \right) \\ = \dot{Q}_{salida} - \dot{W}_{salida} + \sum \dot{m}_s \left(\frac{1}{2}v_s^2 + gz_s + h_s \right) \end{aligned}$$

Si suponemos que la temperatura no varía, no existe trabajo de entrada ni salida, ni calor de entrada ni salida se tiene:

$$\sum \dot{m}_e \left(\frac{1}{2}v_e^2 + gz_e + h_e \right) = \sum \dot{m}_s \left(\frac{1}{2}v_s^2 + gz_s + h_s \right)$$

Pero dado que $h = u + Pv$, con "u" constante, luego:

$$\sum \dot{m}_e \left(\frac{1}{2}v_e^2 + gz_e + (u + Pv)_e \right) = \sum \dot{m}_s \left(\frac{1}{2}v_s^2 + gz_s + (u + Pv)_s \right)$$

$$\sum \dot{m}_e \left(\frac{1}{2}v_e^2 + gz_e + (Pv)_e \right) = \sum \dot{m}_s \left(\frac{1}{2}v_s^2 + gz_s + (Pv)_s \right)$$

Si dividimos todo por g se tiene:

$$\sum \dot{m}_e \left(\frac{v_e^2}{2g} + z_e + \left(P \frac{v}{g} \right)_e \right) = \sum \dot{m}_s \left(\frac{v_s^2}{2g} + z_s + \left(P \frac{v}{g} \right)_s \right)$$

Pero,

$$P \frac{v}{g} = P \cdot \frac{V}{masa * g} = \frac{P}{\gamma}$$

$$\sum \dot{m}_e \left(\frac{v_e^2}{2g} + z_e + \left[\frac{P}{\gamma} \right]_e \right) = \sum \dot{m}_s \left(\frac{v_s^2}{2g} + z_s + \left[\frac{P}{\gamma} \right]_s \right)$$

Si sólo existe una entrada y una salida en estado estacionario se tiene:

$$\frac{v_e^2}{2g} + z_e + \frac{P_e}{\gamma_e} = \frac{v_s^2}{2g} + z_s + \frac{P_s}{\gamma_s}$$

Que se conoce como ecuación de Bernoulli.

Los términos involucrados son:

$\frac{v^2}{2g}$: se conoce como carga de velocidad

z : se conoce como carga de elevación

$\frac{P}{\gamma}$: se conoce como carga de presión

Ecuación que es válida para fluidos incompresibles. En general $\gamma_e = \gamma_s = \gamma$, de este modo se suele escribir si existe una entrada y una salida, la expresión:

$$\frac{v_e^2}{2g} + z_e + \frac{P_e}{\gamma} = \frac{v_s^2}{2g} + z_s + \frac{P_s}{\gamma}$$

Notar que es una expresión de balance de energía ideal, sin pérdidas de energía por roce, pérdidas de calor o acción de trabajo (solo existe el trabajo Pv de fluido)

Dado que la expresión si utiliza en fluidos incompresibles se sigue cumpliendo la ecuación de continuidad si hay una entrada en (1) y una salida en (2) ver la figura 37.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

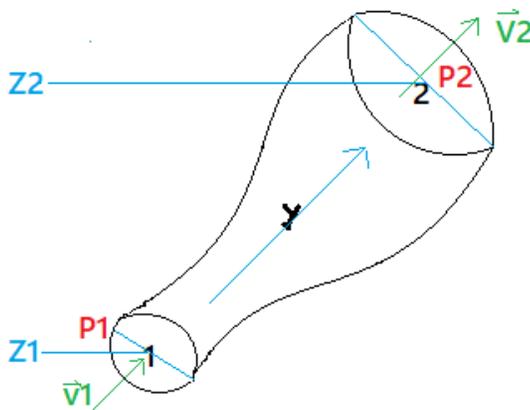


Figura 37: Ecuación de Bernoulli.

Lo anterior puede usarse en estanques, depósitos, toberas expuestas al a atmósfera. Si el fluido en un punto de referencia está expuesto a la atmósfera, la presión manométrica es cero y el término de carga de presión se cancela en la ecuación de Bernoulli. A la carga de velocidad en la superficie de un tanque o depósito se le aproxima a cero dado que el nivel desciende lentamente.

Si la tubería es del mismo diámetro las velocidades deben ser iguales. Esto se verifica al observar la ecuación de continuidad.

Supongamos un tanque de la forma que se indica la **figura 38**:

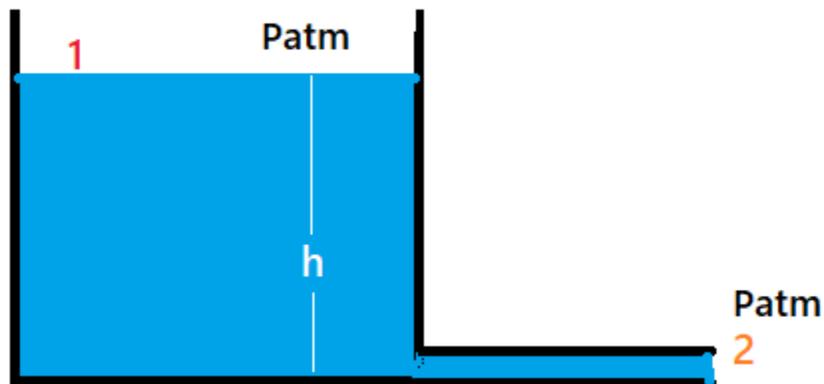


Figura 38: tanque de nivel.

Para el estanque, la ecuación de Bernoulli es:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

En este problema se asume un área de estanque mucho mayor que el área de salida del ducto.

Luego se asume que la velocidad promedio en (1) tiende a cero:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

El punto (1) y el punto dos están abiertos a la atmósfera. Por esta razón puede asumirse que los términos de carga de presión en (1) y (2) son iguales, luego se eliminan, quedando la siguiente expresión:

$$z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

De este modo, reordenando términos queda:

$$z_1 - z_2 = h = \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2^2 = 2gh$$

Finalmente: $v_2 = \sqrt{2gh}$

Lo que significa que la velocidad promedio de salida del tanque depende de la altura del estanque.

Problema 22:

Se tiene un sifón que transporta agua desde una piscina. La tubería que conforma el sifón tiene un diámetro interior de 40 mm y termina en una tobera de 25 mm de diámetro. Suponiendo que el sistema no disipa energía. Calcule el flujo volumétrico a través del sifón y la presión en los puntos B y E (ver figura 39 que contiene los datos).

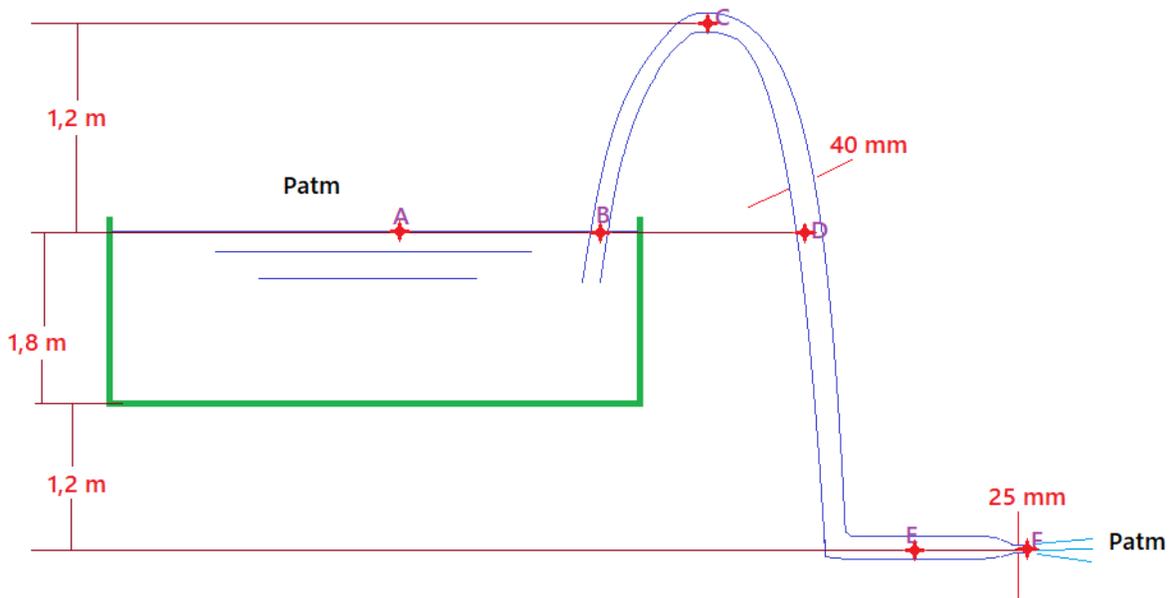


Figura 39: Piscina con sifón.

Solución:

Al observar la figura se tiene que $P_A = P_F = 0$

Además: $v_A = 0$

Se realiza Bernoulli en los puntos A y F:

$$\frac{v_A^2}{2g} + z_A + \frac{P_A}{\gamma} = \frac{v_F^2}{2g} + z_F + \frac{P_F}{\gamma}$$

La ecuación anterior se reduce a:

$$z_A = \frac{v_F^2}{2g} + z_F$$

$$\text{Luego: } v_F = \sqrt{2g(z_A - z_F)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 3,0m} = 7,7 \frac{m}{s}$$

$$Q = A \cdot v = A_F \cdot v_F = \pi \left(\frac{25mm}{2} \right)^2 \cdot \frac{1m^2}{10^6mm^2} \cdot 7,7 \frac{m}{s} = 3,8 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

Para calcular P_B se realiza Bernoulli entre los puntos A y B:

$$\frac{v_A^2}{2g} + z_A + \frac{P_A}{\gamma} = \frac{v_B^2}{2g} + z_B + \frac{P_B}{\gamma}$$

$$z_A = \frac{v_B^2}{2g} + z_B + \frac{P_B}{\gamma}$$

Pero z_A y z_B están a la misma altura, luego se anulan:

$$0 = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma}$$

Se despeja así P_B :

$$P_B = -\frac{\gamma v_B^2}{2g}$$

$$\text{Pero } v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{3,8 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{1,257 \times 10^{-3} m^2} = 3,0 \frac{m}{s}$$

Luego,

$$P_B = -\frac{\gamma v_B^2}{2g} = -\frac{9,81 \frac{kPa}{m} \cdot \left(3,0 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}} = -4,5 \text{ kPa}$$

Notar que $P_A \neq P_B$ a pesar de que se ubica a la misma altura dado que el fluido en el sifón está en movimiento.

Del mismo modo, usando la misma metodología se puede calcular P_C, P_D y P_E :

$$P_C = -16,3 \text{ kPa}$$

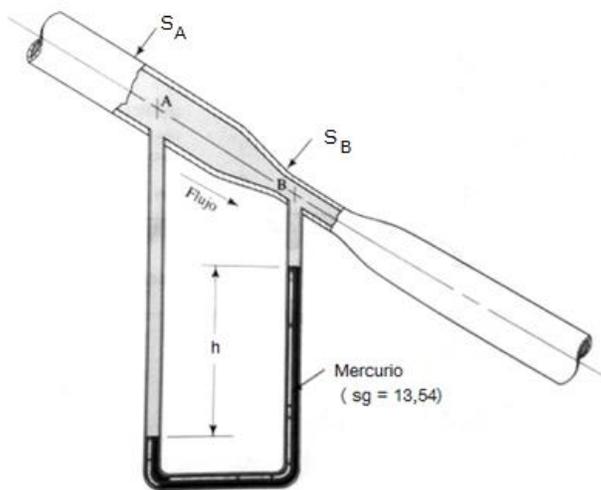
$$P_D = -4,5 \text{ kPa}$$

$$P_E = 24,9 \text{ kPa}$$

Problema 23:

Por el ducto Venturi de la figura 40, circula un líquido con gravedad específica de 1,1. Si la diferencia de altura "h" es 110 cm en el manómetro. Calcule el flujo volumétrico en $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. La dirección de flujo es de "A" hacia "B".

DATOS:



$$S_A = 7,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$S_B = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\gamma_w = 9,81 \frac{\text{kPa}}{\text{m}}$$

$$sg(\text{Hg}) = 13,54$$

Figura 40: ducto de Venturi

Solución:

$$\frac{P_A}{\gamma_{li}} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma_{li}} + z_B + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$\frac{P_A}{\gamma_{li}} - \frac{P_B}{\gamma_{li}} + z_A - z_B = \frac{v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g}$$

Pero,

$$v_B * S_B = Q = v_A * S_A$$

Luego,

$$\frac{P_A}{\gamma_{li}} - \frac{P_B}{\gamma_{li}} + z_A - z_B = \frac{\left(\frac{Q}{S_B}\right)^2}{2g} - \frac{\left(\frac{Q}{S_A}\right)^2}{2g} = \frac{Q^2 \left[\left(\frac{1}{S_B}\right)^2 - \left(\frac{1}{S_A}\right)^2 \right]}{2g} (*)$$

Por otro lado, se calcula el manómetro de la figura y se tiene la relación:

$$P_A + \gamma_{li}(z_A - z_B) + \gamma_{li}h = h\gamma_{Hg} + P_B$$

$$P_A - P_B = -\gamma_{li}(z_A - z_B) - \gamma_{li}h + \gamma_{Hg}h$$

$$P_A - P_B = +\gamma_{li}(z_B - z_A) + h(\gamma_{Hg} - \gamma_{li})$$

$$\frac{P_A - P_B}{\gamma_{li}} = +(z_B - z_A) + h \frac{(\gamma_{Hg} - \gamma_{li})}{\gamma_{li}}$$

$$\frac{P_A - P_B}{\gamma_{li}} = +(z_B - z_A) + h \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{li}} - 1 \right)$$

$$\frac{P_A - P_B}{\gamma_{li}} = +(z_B - z_A) + h \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{li}} - 1 \right) (**)$$

Reemplazando (**) en (*) se tiene:

$$(z_B - z_A) + h \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{li}} - 1 \right) + z_A - z_B = \frac{Q^2 \left[\left(\frac{1}{S_B} \right)^2 - \left(\frac{1}{S_A} \right)^2 \right]}{2g}$$

$$h \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{li}} - 1 \right) = \frac{Q^2 \left[\left(\frac{1}{S_B} \right)^2 - \left(\frac{1}{S_A} \right)^2 \right]}{2g}$$

Despejando Q se tiene:

$$Q = \sqrt{\frac{2gh \left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{li}} - 1 \right)}{\left[\left(\frac{1}{S_B} \right)^2 - \left(\frac{1}{S_A} \right)^2 \right]}} = \sqrt{\frac{2gh \left(\frac{(sg)_{Hg}}{(sg)_{li}} - 1 \right)}{\left[\left(\frac{1}{S_B} \right)^2 - \left(\frac{1}{S_A} \right)^2 \right]}}$$

Solo tiene sentido físico su valor positivo.

Evaluando:

$$Q = \sqrt{\frac{2 * 9,81 \frac{m}{s^2} * 1,1 m * \left(\frac{13,54}{1,1} - 1 \right)}{\left[\left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-3} m^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{7 \cdot 10^{-3} m^2} \right)^2 \right]}} = 32,6 \times 10^{-2} \frac{m^3}{s}$$

Problema 24:

Un estanque cilíndrico abierto de altura 10 m y radio 1,0 m, está lleno de agua. El estanque se vacía por su fondo, por un orificio de radio $\frac{1}{3}$ m, **no despreciable** frente al radio del estanque.

Determine la velocidad promedio de vaciado en salida, por el fondo del estanque.

Solución:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\gamma} = 0$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = (z_1 - z_2) = h$$

Pero, $Q_1 = Q_2 \leftrightarrow v_1 \pi r_{est}^2 = v_2 \pi r_{orif}^2$

$$v_1 = v_2 \frac{r_{orif}^2}{r_{est}^2}$$

$$v_2^2 - v_2^2 \frac{r_{orif}^4}{r_{est}^4} = 2gh$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{r_{orif}}{r_{est}}\right)^4}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 * 9,81 \frac{m}{s^2} * 10 m}{1 - \left(\frac{\frac{1}{3} m}{1 m}\right)^4}} = \sqrt{\frac{2 * 9,81 \frac{m}{s^2} * 10 m}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4}}$$

$$v_2 = 14,1 \frac{m}{s}$$

3.2 Ecuación General de Energía

Como ya se comentó, la ecuación de Bernoulli es un balance de energía en estado estacionario ideal, no obstante, es posible adicionar términos a la ecuación de Bernoulli, ya sean pérdidas como la fricción, la presencia de válvulas en las tuberías y accesorios como codos, expansiones o contracciones de sección de la tubería, empalmes, entre otras. Existen además equipos que retiran energía del fluido como son las turbinas mientras que cuando se trata de líquidos, hay dispositivos que adicionan energía al fluido como son los equipos de bombeo.

De esta forma, la ecuación de Bernoulli puede reescribirse en una forma más amplia, considerando estos términos, en una ecuación más general.

Si se considera que el sistema no pierde ni gana calor, ni cambia su temperatura, y el fluido es un líquido, es posible considerar el fluido como incompresible, por lo que sigue siendo válido el principio de continuidad.

Luego se tiene que si se tiene una entrada (1) y una salida (2), entonces:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Que es equivalente a establecer:

$$Q_1 = Q_2$$

Recordemos además que la ecuación de Bernoulli es de la forma:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

Ecuación válida en fluidos incompresibles, sin accesorios, sin transferencia de calor, ni cambios térmicos y sin roce.

3.2.1 Dispositivos y equipo

En general, en las industrias existen equipos de bombeo y válvulas lo que cambia las condiciones del sistema e introduce nuevos términos. Es necesario profundizar en estos equipos en su descripción.

Bombas: Siempre añaden energía a un fluido. Su principio de operación consiste en un motor que impulsa un eje rotatorio en la bomba. Se transfiere energía cinética al fluido, aumentando su presión. La figura 41 ilustra el diseño de una bomba centrífuga.

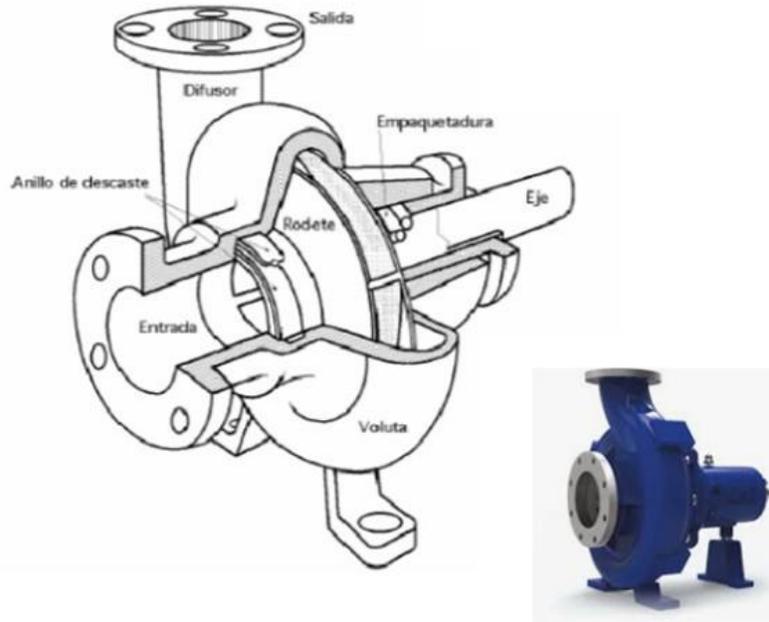


Figura 41: Bomba centrífuga.

La turbina es el típico ejemplo de un dispositivo que utiliza energía del fluido para realizar otras prestaciones. En general el fluido disminuye su velocidad, generando caídas de presión. Un dispositivo muy conocido en este sentido son los molinos que en general funcionan aprovechando la energía cinética y potencial del agua.

3.2.2 Pérdidas o ganancia de energía en un fluido

Existen en los sistemas hidráulicos pérdidas asociadas a la fricción, que se produce por el movimiento del fluido y el contacto con las paredes. Muchas de estas pérdidas pueden entenderse como disipación de calor o bien como turbulencias. Las turbulencias en general se producen cuando hay cambios de dirección en el flujo de un fluido, por ejemplo, por presencia de un codo, reducciones de sección de cañería o la presencia de válvulas.

Las pérdidas y ganancias de energía por estos conceptos se notarán por medio de los siguientes términos:

h_A : Energía que se adiciona al fluido por uso de bombas (carga total sobre la bomba).

h_R : Energía removida por uso de turbinas o dispositivos equivalentes.

h_L : Energía perdida por presencia de fricción en tuberías, uso de válvulas o accesorios como codos.

Las pérdidas o ganancias de energía por transferencia de calor no se consideran dado que se considera que fluye un líquido a temperatura constante y que éste es incompresible.

Respecto de las pérdidas por fricción del fluido en accesorios o válvulas, se tiene que la energía disipada tiene una pérdida proporcional a la carga en velocidad del fluido de modo que se satisface la ecuación:

$$h_L = K \frac{v^2}{2g}$$

donde K es un coeficiente de resistencia.

Por ahora la discusión se centrará en entender la ecuación general de energía y su uso. Es posible considerar las pérdidas y ganancias de energía en una ecuación general, de modo que se establece un balance de energía del fluido por unidad de peso considerando en (1) la entrada y en (2) la salida. Dado esto, la dirección de flujo es de (1) → (2).

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + h_A - h_R - h_L = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

A continuación, se resuelven varios problemas tipo, usando este balance general.

Problema 25:

Considere un depósito grande, desde el cual fluye agua a razón de $1,2 \frac{pie^3}{s}$ por una tubería. Calcule la cantidad total de energía que se pierde en el sistema debido a la presencia de la válvula, codos, el empalme de la tubería al estanque y la fricción entre el fluido y el ducto. Ver figura 42.

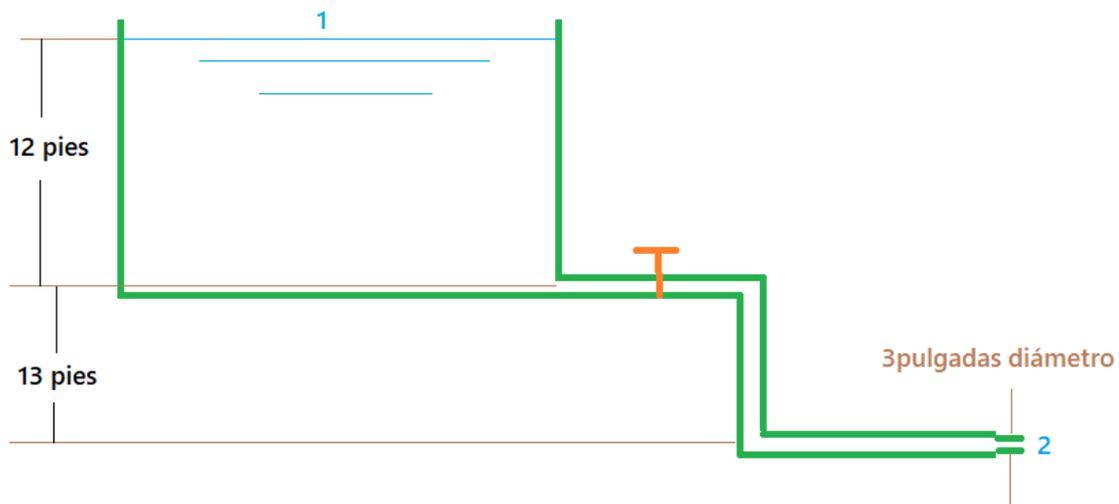


Figura 42: Depósito, vista perfil

Solución:

Se plantea la ecuación general de energía.

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + h_A - h_R - h_L = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

Se imponen las condiciones de borde de acuerdo con el enunciado:

$$P_1 = 0; P_2 = 0; v_1 = 0; h_A = 0; h_R = 0$$

luego

$$z_1 - h_L = \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$h_L = -\frac{v_2^2}{2g} + z_1 - z_2 = -\frac{v_2^2}{2g} + 25 \text{ pies}$$

se requiere calcular v_2 que se determina mediante la ecuación de continuidad:

$$Q = A_2 \cdot v_2 = 1,2 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$$

$$A_2 = \pi \frac{d^2}{4} = 0,049 \text{pie}^2$$

Luego;

$$v_2 = 24,4 \frac{\text{pie}}{\text{s}}$$

De este modo:

$$h_L = -\frac{v_2^2}{2g} + 25 = -\frac{\left(24,4 \frac{\text{pie}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 32,2 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}} + 25 \text{ pies} = 15,75 \text{ pie} = 15,75 \frac{\text{lb} \cdot \text{pie}}{\text{lb}}$$

3.2.2.1 Potencia de una bomba.

La potencia es el trabajo realizado en cierto intervalo de tiempo (\dot{W}). Dicha potencia será denotada por " \mathbb{P}_A " y se mide en Watts en sistema internacional de modo que:

$$1 \text{ watt} = 1 \frac{N \cdot m}{s} = 1 \frac{J}{s}$$

La potencia es posible calcularla a partir del flujo en peso $W = \gamma \cdot Q$

De este modo, la potencia se estima como:

$$\mathbb{P}_A = h_A \cdot W = h_A \cdot \gamma \cdot Q$$

Notar que h_A es un término de energía en unidades de "m" o $\frac{N \cdot m}{N}$.

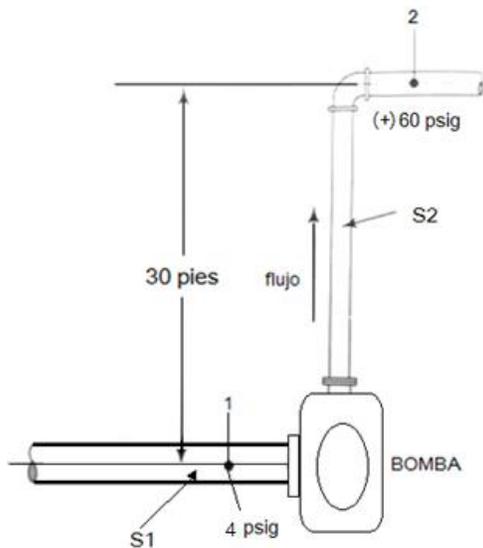
El flujo en peso (W) tiene unidades de $\frac{N}{s}$ y, además, las unidades del peso específico son $\frac{N}{m^3}$ y las del flujo volumétrico (Q) se miden en $\frac{m^3}{s}$.

Es usual usar como unidad de medida de potencia unidades inglesas. El hp suele ser la unidad más común, donde:

$$1 \text{ hp} = 550 \frac{lb \cdot pie}{s} = 745,7 \text{ watts}$$

Problema 26:

Determine el caudal del fluido en el sistema en $\frac{pie^3}{s}$, si los hp que debe transmitir la bomba de la figura 43, si el fluido impulsado tiene peso específico de $75 \frac{lb}{pie^3}$. Los hp transmitidos por la bomba son 2,5 hp. La cañería descrita por S₁ es de acero, de área transversal interior $0,181 pie^2$. La tubería S₂ es de acero, de área transversal interior $0,0459 pie^2$. La cañería tiene una diferencia de altura de 30 pies.



Datos:

$$1 \text{ hp} = 550 \frac{lb \cdot pie}{s}$$

$$1 \text{ psi} = 1 \frac{lb}{pulg^2}$$

$$1 \text{ pie} = 12 \text{ pulg}$$

$$g = 32,2 \frac{pie}{s^2}$$

Figura 43: bomba y especificaciones de cañerías

Solución

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + h_A - h_L = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

y

$$v_2 * S_2 = Q = v_1 * S_1$$

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{Q^2 \left[\left(\frac{1}{A_2} \right)^2 - \left(\frac{1}{A_1} \right)^2 \right]}{2g} = \frac{\left(Q \frac{pie^3}{s} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{0,0459 pie^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{0,181 pie^2} \right)^2 \right]}{2 \cdot 32,2 \frac{pie}{s^2}}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = 6,896 * Q^2 \text{ pies}$$

Con Q en pie cúbico/segundo

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \frac{60\text{psig} - 4\text{psi}}{75 \frac{\text{lb}}{\text{pie}^3}} = \frac{56 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} \cdot \left(\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}\right)^2}{75 \frac{\text{lb}}{\text{pie}^3}} = 107,52 \text{ pies}$$

$$z_2 - z_1 = 30 \text{ pies}$$

$$h_A = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$h_A = 107,52 \text{ pies} + 30 \text{ pies} + 6,8964 * Q^2 \text{ pies} = 137,52 \text{ pies} + 6,8964 * Q^2 \text{ pies}$$

$$\mathbb{P}_A = h_A * \gamma * Q = (137,52 + 6,8964 * Q^2) \text{pies} \cdot 75 \frac{\text{lb}}{\text{pie}^3} \cdot Q \frac{\text{pie}^3}{\text{s}} \frac{1 \text{ hp}}{550 \frac{\text{lb} \cdot \text{pie}}{\text{s}}} = 2,5 \text{ hp}$$

$$(18,75 + 0,9404Q^2)Q = 2,5$$

Dos complejas y una real pero se asume que el termino $0,9404Q^2$ es pequeño (cercano a cero), luego

$Q \cong \frac{2,5}{18,75} \cong 0,1333 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$ valor muy cercano al que se obtendría en la cúbica si se calcula:

$$Q = 0,133215 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$$

3.2.2.2 Eficiencia mecánica de bombas.

La eficiencia de una bomba da la relación de la potencia transmitida por la bomba al fluido respecto a la potencia que se suministra a la bomba. Las bombas tienen pérdidas por fricción mecánica de los componentes de la bomba (sus propias piezas), fricción con el fluido y turbulencias, lo que afecta su eficiencia, de modo que es posible definir la eficiencia mecánica de la forma:

$$e_M = \frac{\text{potencia transmitida al fluido}}{\text{Potencia de entrada a la bomba}} = \frac{\mathbb{P}_A}{\mathbb{P}_I} \leq 1$$

En bombas centrífugas la eficiencia se mueve entre 50 a 85%.

Problema 27:

Para el arreglo de prueba de la figura 44, determine la eficiencia mecánica de la bomba, si la potencia de entrada que se midió fue de 3,85 hp cuando bombeaba $500 \frac{gal}{min}$ de aceite cuyo peso específico es de $\gamma_l = 56 \frac{lb}{pie^3}$.

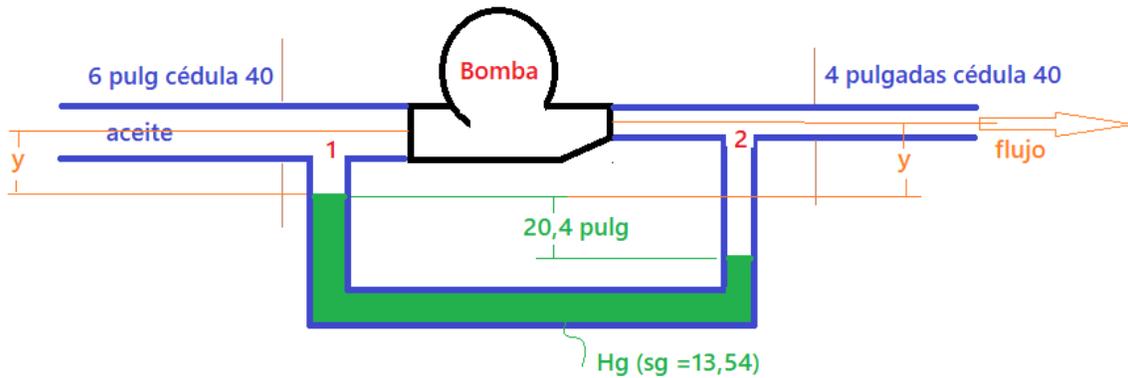


Figura 44: arreglo de prueba.

Solución:

Se plantea la ecuación general de energía, de modo que se desea determinar h_A :

$$\frac{P_1}{\gamma_l} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + h_A - h_L = \frac{P_2}{\gamma_l} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Dado que no se reporta pérdida de energía por fricción se tiene:

$$h_A = \frac{P_2 - P_1}{\gamma_l} + z_2 - z_1 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

Es necesario obtener del manómetro la diferencia $\frac{P_2 - P_1}{\gamma_l}$, para esto se requiere revisar la figura.

Se calcula:

$$\gamma_m = 13,54 \cdot \gamma_w = 13,54 \cdot 62,4 \frac{lb}{pie^3} = 844,9 \frac{lb}{pie^3}$$

$$P_2 = P_1 + \gamma_m \cdot 20,4 \text{ pulg} - \gamma_l \cdot 20,4 \text{ pulg}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma_l} = \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_l} - 1 \right) 20,4 \text{ pulg} = \left(\frac{844,9 \frac{lb}{pie^3}}{56,0 \frac{lb}{pie^3}} - 1 \right) \cdot 20,4 \text{ pulg} \cdot \frac{1 \text{ pie}}{12 \text{ pulg}} = 24 \text{ pies}$$

$$z_2 - z_1 = 0$$

$$\frac{500 \text{ gal}}{\text{min}} = 1,11 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{A_1}\right)^2}{2g} = \frac{12,6^2 - 5,55^2 \text{ pies}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 32,2} = 1,99 \text{ pies}$$

$$h_A = 24 \text{ pie} + 0 + 1,99 \text{ pie} = 25,99 \text{ pie}$$

$$\mathbb{P}_A = h_A \cdot \gamma \cdot Q = 25,99 \text{ pie} \cdot 56 \frac{\text{lb}}{\text{pie}^3} \cdot 1,11 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}} = 1620 \frac{\text{lb} \cdot \text{pie}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ hp}}{550 \frac{\text{lb} \cdot \text{pie}}{\text{s}}} = 2,95 \text{ hp}$$

$$e_M = \frac{\mathbb{P}_A}{\mathbb{P}_I} = \frac{2,95 \text{ hp}}{3,85 \text{ hp}} = 0,77$$

La bomba tiene un 77% de eficiencia.

3.2.2.3 Potencia en motores de fluido o turbinas

De la misma forma que se define la eficiencia para bombas es posible definir la eficiencia en una turbina. Simplemente debe tenerse presente quien suministra la energía quien la recibe. En este caso se expresa la eficiencia del siguiente modo:

$$\mathbb{P}_R = h_R \cdot W = h_R \cdot \gamma \cdot Q$$

Donde \mathbb{P}_R es la potencia transmite al motor de fluido o turbina, luego:

$$e_M = \frac{\text{Potencia de salida del motor o turbina}}{\text{Potencia que transmite el fluido}} = \frac{\mathbb{P}_0}{\mathbb{P}_R} \leq 1$$

3.3 Características de los Fluidos

3.3.1 Número de Reynolds

Es posible calcular las pérdidas de energía de fluidos que circulan en sistemas de tuberías. Cuando un fluido tiene bajos niveles de mezcla se habla de flujos laminares ya que el fluido parece moverse en láminas continuas con baja mezcla entre sus capas adyacentes. En fluidos de mayor velocidad, aumenta el caos del sistema y aumenta la mezcla entre sus capas de corriente, describiendo un flujo turbulento. Existe una zona de transición en la cual un fluido laminar se vuelve turbulento. Con turbulencia aumenta el nivel de mezcla, se aceleran las reacciones químicas y aumenta la transferencia de calor.

Hay otras variables que gobiernan el régimen en que circula un fluido. La viscosidad y la densidad son relevantes al igual que la velocidad, la sección de tubería y variables como la presión y la temperatura afectan los parámetros de estudio. Es así como la velocidad depende del tamaño de la sección y de la presión y la temperatura incide en valores de densidad y viscosidad del fluido. Ver figura 45.

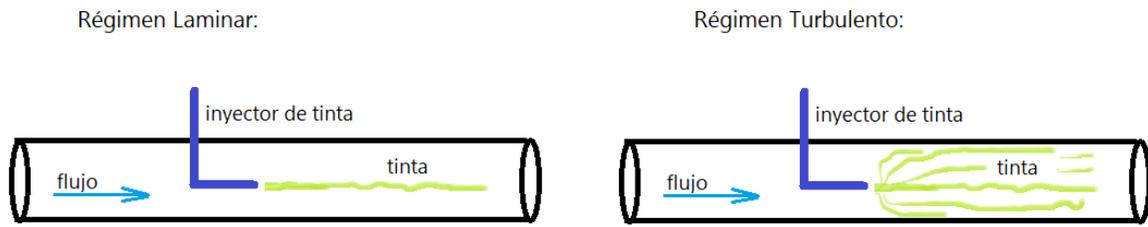


Figura 45: Régimen laminar y turbulento

Se define el número de Reynolds para identificar si un fluido tiene flujo laminar o turbulento.

$$N_R = \frac{v \cdot D}{\mu} = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta}$$

donde:

$$\mu = \frac{\eta}{\rho}$$

Los términos que definen este número adimensional son:

v: velocidad promedio del fluido (m/s) o (pie/s)

D: diámetro de la tubería de sección circular (m) o (pie)

ρ : densidad del fluido $\frac{kg}{m^3}$ o $\frac{slug}{pie^3}$

η : viscosidad dinámica $\frac{kg}{m \cdot s}$ o $Pa \cdot s$; $\frac{slug}{pie \cdot s}$

μ : viscosidad cinemática $\frac{m^2}{s}$ o $\frac{pie^2}{s}$

De este modo el análisis dimensional del número de Reynolds es tal que es un adimensional. El número de Reynolds es la relación de la fuerza de inercia sobre un elemento de fluido y la fuerza viscosa.

En general en tuberías se satisface que:

$N_R < 2000$ el régimen es laminar

$N_R > 4000$ el régimen es turbulento

$2000 < N_R < 4000$ está el fluido en una región crítica con un régimen de transición.

Problema 28:

Determine si el flujo es laminar o turbulento, si fluye glicerina a 25°C en una tubería cuyo diámetro interior es de 150 mm. La velocidad del flujo promedio es de 3,6 m/s

Solución:

Para la temperatura dada se tiene del apéndice B del libro de mecánica de fluidos de Mott que:

$$\rho = 1258 \frac{kg}{m^3}$$
$$\eta = 9,6 \cdot 10^{-1} Pa \cdot s$$

De este modo

$$N_R = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta}$$

Se obtiene

$$N_R = \frac{3,6 \frac{m}{s} \cdot 0,15m \cdot 1258 \frac{kg}{m^3}}{9,6 \cdot 10^{-1} \frac{kg}{m \cdot s}} = 708$$

Luego el régimen es laminar.

Problema propuesto:

En la Figura 46 se observa un fluido que circula con densidad de $1260 \frac{kg}{m^3}$, viscosidad de $0,96 Pa \cdot s$ y diámetro interior de la tubería de 300 mm. Su velocidad es de 3,6 m/s (diámetro mayor). Dicho tubo se abre en dos tuberías menores de diámetros interiores iguales de 150 mm de diámetro.

Calcule el número de Reynolds en las tres tuberías. Establezca si el régimen es laminar o turbulento en cada caso.

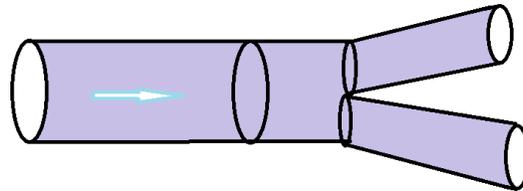


Figura 46: tubería

3.3.2 Ecuación de Darcy.

El término h_L se definió como la pérdida de energía en el sistema a causa de roce u otras singularidades como accesorios y/o válvulas. Debe recordarse que es uno de los términos definidos en la ecuación general de energía. Cuando esa pérdida se relaciona a fricción producida por el fluido con las tuberías por las que circula, es posible estimar dicha energía perdida por medio de la ecuación de Darcy:

$$h_L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

donde:

v: velocidad promedio del fluido (m/s) o (pie/s)

D: diámetro de la tubería de sección circular (m) o (pie)

L: longitud de la tubería (m) o (pie)

f: factor de fricción (adimensional)

En el caso que el régimen es laminar o turbulento "f" se calcula de forma distinta.

En el caso laminar, h_L se calcula por medio de la ecuación de Hagen- Poiseville:

$$h_L = \frac{32 L \mu}{\gamma D^2} v$$
$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

$$f = \frac{64\eta g}{vD\gamma} = \frac{64\eta}{vD\rho} = \frac{64}{N_R}$$

De este modo, si se sabe que el régimen es laminar, f solo depende del número de Reynolds.

Problema 29

Determine la pérdida de energía si fluye glicerina a 25°C por un tubo de 150 mm de diámetro y 30 m de largo a una velocidad promedio de $4,0\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Solución:

Se calcula el número de Reynolds:

$$\rho = 1258 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\eta = 9,6 \cdot 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\text{De este modo, } N_R = \frac{4,0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,15\text{m} \cdot 1258\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{9,6 \cdot 10^{-1}\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}} = 786$$

Luego el régimen es laminar.

$$h_L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{N_R} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{786} \cdot \frac{30\text{ m}}{0,15\text{ m}} \cdot \frac{4,0^2\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 13,2\text{ m}$$

$$h_L = 13,2 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{N}}$$

3.3.2 Pérdidas de fricción en el caso turbulento.

Si se observa un corte transversal de una cañería es posible darse cuenta de que con el uso pueden depositarse películas cuyo origen puede ser la dureza del agua (sales con contenido de Mg y Ca principalmente) que forman un sarro difícil de remover o disolver. Esto genera una rugosidad que disminuye la sección del ducto afectando los cálculos de diseño. Adicionalmente, si se tuviese un material nuevo, sin este tipo de incrustaciones, se observa que sus paredes son distintas dependiendo del tipo de material, unas son más ásperas que otras. Cuando es más áspera se habla de más rugosa o sencillamente de su rugosidad.

La figura 47, ilustra una pared con rugosidad caracterizada por ϵ (épsilon).

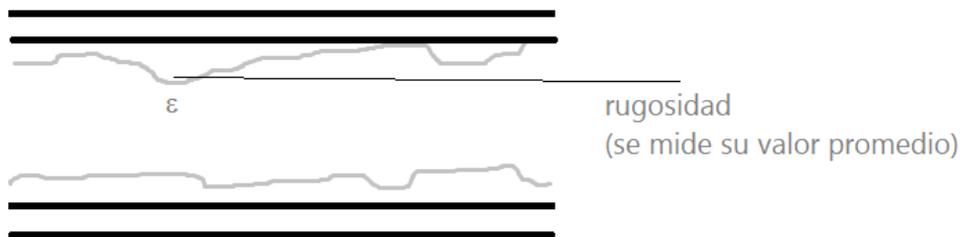


Figura 47: Rugosidad en una tubería de sección circular.

Algunos valores de diseño de estos sistemas se estipulan en la tabla 2:

material	Rugosidad (ϵ) en metros	Rugosidad (ϵ) en pies
Vidrio	Liso (0)	Liso (0)
Plástico	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$
Tubo extruido de C, Fe o latón	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$5,0 \cdot 10^{-6}$
Acero comercial	$4,6 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
Acero remachado	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$

Tabla2: rugosidad de distintos materiales, valor de fábrica.

3.3.3 Diagrama de Moody

Un método usado para determinar el factor de fricción es usando el diagrama de Moody. Este diagrama ilustra el factor de fricción f versus el número de Reynolds N_R de modo que se establecen una serie de familias de curvas paramétricas de rugosidad relativa $\frac{D}{\epsilon}$, adimensional. Es una gráfica log-log.

En Reynolds menores que 2000, se describe una recta laminar que ilustra $f = \frac{64}{N_R}$.

Entre N_R en el rango 2000 – 4000 no tiene sentido la lectura. Por lo tanto, este gráfico se suele usar en régimen turbulento con valores de Número de Reynolds superiores a 4000.

Algunas lecturas pueden verificarse al usar el grafico que se ilustra en la figura 48.

FIGURA 8.6 Diagrama de Moody. (Fuente: Pao, R. H. F. 1961. *Fluid Mechanics*. Nueva York: John Wiley e hijos, p. 284.)

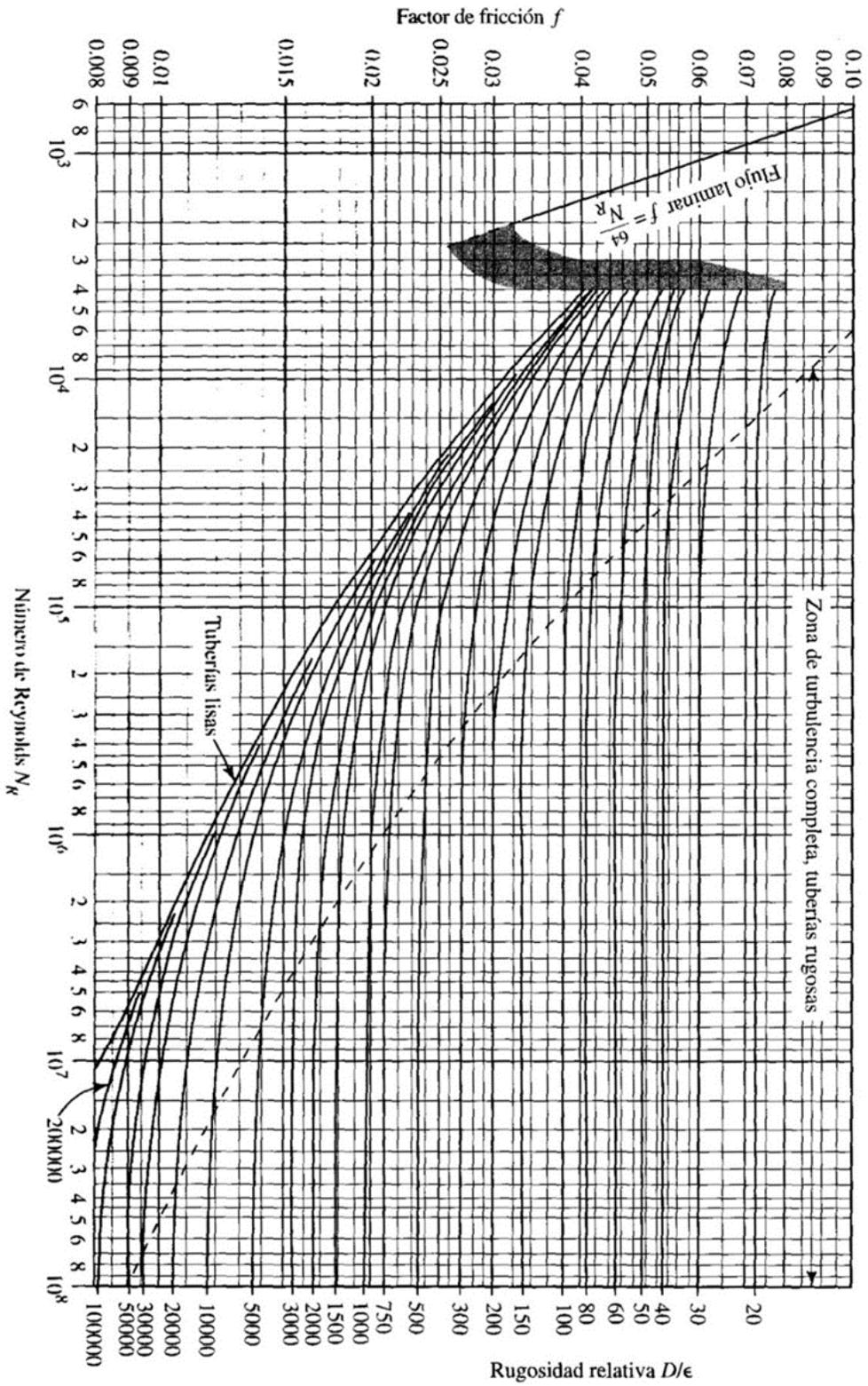


Figura 48: Gráfico de Moody.

Algunas lecturas del diagrama son las siguientes:

N_R	$\frac{D}{\epsilon}$	f
$6,7 \times 10^3$	150	0,043
$1,6 \times 10^4$	2000	0,028
$1,6 \times 10^6$	2000	0,017
$2,5 \times 10^5$	733	0,022

De este modo, conociendo el número de Reynolds y la rugosidad relativa se puede determinar f y calcular la pérdida de energía por medio de la ecuación de Darcy.

Problema 30

El flujo volumétrico a través de una tubería de hierro forjado de sección constante de 10 cm de diámetro interno es de $0,05 \frac{m^3}{s}$. Un estanque grande descarga agua por la tubería hacia el medioambiente. La rugosidad ϵ de la tubería se estima en $4,6 \times 10^{-5} m$. La tubería tiene una pérdida asociada a la longitud de la tubería. La viscosidad cinemática del agua que circula por la tubería es $10^{-6} \frac{m^2}{s}$. La figura 49, detalla dimensiones.

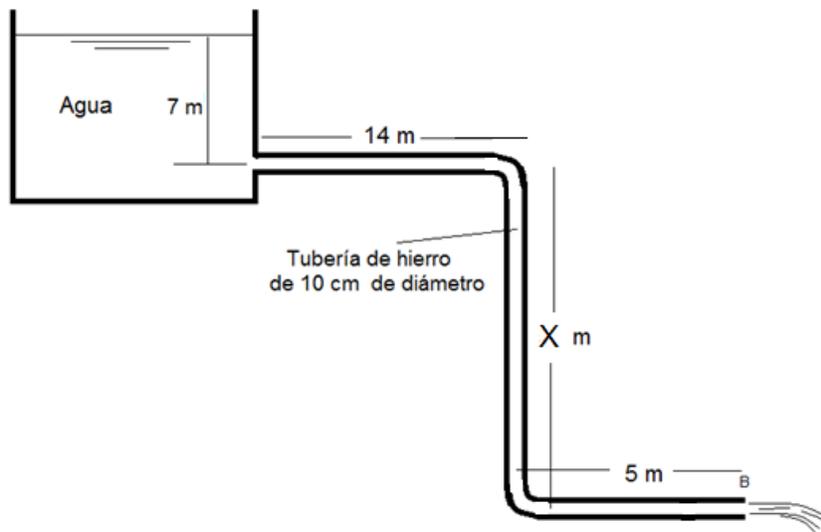


Figura 49: Diagrama problema 30

- Determine el número de Reynolds en la tubería e indique el régimen.
- Calcule el factor de Fricción.
- Señale la longitud X del tubo.

Solución:

$$a) \quad v = \frac{Q}{A} = \frac{0,05}{\pi \cdot 0,05^2} = 6,36 \frac{m}{s}$$

$$N_R = \frac{VD}{\nu} = \frac{6,36 \cdot 0,1}{10^{-6}} = 6,36 \times 10^5$$

En un fluido turbulento

$$b) \quad \frac{D}{\epsilon} = \frac{0,1 m}{4,6 \cdot 10^{-5} m} = 2174$$

Utilizando los valores de N_R y $\frac{D}{\epsilon}$ en la figura 48 se puede obtener

$$f = 0,018 \text{ (Moody)}$$

$$c) \quad P_1 = P_2 = 0, v_1 = 0$$

$$z_1 = z_2 + \frac{v_{prom.B}^2}{2g} + h_L$$

$$z_1 - z_2 = (X + 7)m$$

$$z_1 - z_2 - \frac{v^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$z_1 - z_2 - \left(f \frac{L}{D}\right) \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

$$(7 + x) - \left(0,018 \frac{19 + X}{0,1}\right) \frac{6,36^2}{2 \cdot 9,81} = \frac{6,36^2}{2 \cdot 9,8}$$

$$X = 51,9 m$$

Capítulo 4

Análisis dimensional

Existen varios métodos para deducir la ecuación física de un problema relacionando sus cantidades físicas relacionadas, y éstos dependen del número de variables que están involucradas en el mismo. Si se trata de tres o menos variables, se utilizan métodos directos partiendo comúnmente de ecuaciones diferenciales. Si, por el contrario, son 4 o más variables las incluidas, como problemas de ingeniería pueden resolverse mediante ecuaciones basadas en leyes o balances (de materia, energía, cantidad de movimiento, etc), debido a que por un lado pueden resultar muy complejos y por otro lado los problemas involucran un gran número de variables.

Por ejemplo, para el flujo de un fluido newtoniano en régimen laminar se pueden deducir ecuaciones de flujo y pérdidas de fricción al aplicar un balance microscópico de cantidad de movimiento, tal y como se ha demostrado previamente; sin embargo, para el flujo de un fluido newtoniano en un régimen turbulento no se pueden obtener ecuaciones tan simples. Como consecuencia de esta situación se emplean ecuaciones empíricas basadas en experimentos. Una forma de facilitar la resolución de este tipo de problemas y de otros similares consiste en agrupar las variables en una nueva pseudo-variable adimensional para simplificar el análisis. A continuación, se presenta el Teorema π de Vaschy-Buckingham el cual permite obtener números adimensionales a partir de un conjunto de variables asociadas a un problema particular:

4.1 Teorema π de Vaschy - Buckingham.

“El Teorema π de Vaschy - Buckingham establece que cuando el número de variables o magnitudes físicas de las que es función la magnitud problema, cuya ecuación física queremos deducir, son cuatro o más, éstas se pueden agrupar en un número menor de grupos adimensionales, llamados números π , y a partir de éstos establecer la ecuación homogénea”.

“El Teorema π de Vaschy - Buckingham es una teoría que organiza los pasos que garantizan la homogeneidad dimensional; requiere un cierto grado de conocimiento de los fenómenos para que se incluyan las n cantidades de interés apropiadas y número m de dimensiones básicas incluidas en las cantidades. Estipula que $(n - m)$ grupos de variables sin dimensiones, llamados términos π .

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m})$$

Problema 31:

Se va a estudiar la fuerza de retardo F_D en un cilindro de diámetro D y longitud ℓ . ¿Qué forma funcional relaciona las variables sin dimensiones si un fluido con velocidad fluye normal al cilindro?

Solución:

- i. El primer paso es escribir la forma funcional de la variable dependiente de acuerdo con las $(n - 1)$ variables independientes.

Antes que nada, vamos a determinar las variables que tienen alguna influencia en la fuerza de retardo. Normalmente estos conocimientos son obtenidos de forma experimental. En este ejemplo, se incluyen como variables influyentes; la velocidad de corriente libre v , la viscosidad μ , la densidad del fluido ρ , además del diámetro D y la longitud del cilindro ℓ , con lo que se obtienen $m = 6$ variables. Esto se describe como:

$$F_D = f(D, \ell, v, \mu, \rho)$$

Se puede realizar una tabla con las cantidades y sus dimensiones fundamentales.

Cantidad Física	Dimensiones
F_D	$\frac{ML}{T^2}$
D	L
ℓ	L
v	$\frac{L}{T}$
μ	$\frac{M}{LT}$
ρ	$\frac{M}{L^3}$

Tabla 3: Tabla de cantidades y unidades

De esta forma, podemos darnos cuenta más fácil de las 6 variables que tenemos y también de que tenemos $n = 3$ dimensiones diferentes.

Para obtener el número de parámetros adimensionales posibles (π), calculamos:

$$m - n = 6 - 3 = 3$$

El siguiente paso es elegir 3 de las 6 variables, y las llamaremos “repetidas”

ii. El segundo paso es identificar variables repetidas m , variables que se combinarán con cada variable restante para formar los términos.

“Las variables repetidas seleccionadas de las variables independientes contienen todas las dimensiones básicas, sin embargo, no deben formar un término π por sí mismas.”

¿A qué se refiere exactamente con no formar un término π ?, A que entre las variables que elijamos como repetidas no se “cancelen” y se vuelvan adimensionales. ¿Y cómo vamos a saber cuántas variables repetidas formar? Esto depende del número de dimensiones que se tengan. Teniendo esto en cuenta, podemos elegir nuestras 3 variables, ya que nuestro problema abarca 3 dimensiones: M , L y T . En este caso tomaremos: D , v y ρ . Si observamos la tabla 3, esta elección contiene las 3 dimensiones y no se cancelan entre ellas. También es recomendable no usar como repetida la variable que está en función de las demás, en este caso: F_D .

iii. El tercer paso es formar los términos π combinando las variables repetidas con cada una de las variables restantes.

Este paso puede llevarse a cabo mediante un procedimiento algebraico simple. Empecemos por la combinación de nuestro primer término π . Puede escribirse como:

$$\pi_1 = D^a v^b \rho^c F_D$$

El objetivo de este paso es determinar a, b y c de modo que el agrupamiento quede sin dimensiones. Por lo tanto, y basándonos en la tabla 3:

$$M^0 L^0 T^0 = (L)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{ML}{T^2}\right)$$

Esto también lo podemos expresar diferente para interpretar mejor, cualquiera de las dos es correcta:

$$M^0 L^0 T^0 = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (MLT^{-2})$$

Ahora podemos igualar los exponentes en donde se encuentra cada dimensión, obteniendo así un sistema de ecuaciones lineales, serán tantas ecuaciones como dimensiones tengamos:

$$\begin{aligned} M: & \quad 0 = c + 1 \\ L: & \quad 0 = a + b - 3c + 1 \\ T: & \quad 0 = -b - 2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene lo siguiente:

$$c = -1, b = -2 \text{ y } a = -2$$

Entonces el término π_1 se escribiría como:

$$\pi_1 = D^{-2} v^{-2} \rho^{-1} F_D$$

ó

$$\pi_1 = \frac{F_D}{D^2 v^2 \rho}$$

Esa sería la ecuación para el término π_1 , también se pueden obtener π_2 y π_3 , utilizando el mismo procedimiento. Los cuales deber dar el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{\ell}{D} \\ \pi_3 &= \frac{\mu}{Dv\rho} \end{aligned}$$

iv. El cuarto paso es escribir la forma funcional de los $(n - m)$ términos sin dimensiones.

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3)$$

ó

$$\frac{F_D}{D^2 v^2 \rho} = f_1\left(\frac{\ell}{D}, \frac{\mu}{Dv\rho}\right)$$

En lugar de la relación original de seis variables el problema se redujo a uno que implica tres términos π , un problema mucho más simple.

Problema 32:

Considérese el flujo incompresible al interior de un tubo circular de diámetro interno “D”.

Solución:

Sus variables importantes son $\Delta P, v, D, \ell, \mu, \rho$.

El número de variables es 6, $m = 6$. Cuyas dimensiones se detallan en la tabla 4

Cantidad Física	dimensiones
ΔP	$\frac{M}{LT^2}$
D	L
ℓ	L
v	$\frac{L}{T}$
μ	$\frac{M}{LT}$
ρ	$\frac{M}{L^3}$

Tabla 4: Dimensiones cantidades físicas

De esta forma, podemos darnos cuenta más fácil de las 6 variables que tenemos y también de que tenemos $n = 3$ dimensiones diferentes.

Para obtener el número de parámetros adimensionales posibles (π), calculamos:

$$m - n = 6 - 3 = 3$$

Las variables repetidas para los tres números π , para este ejemplo son: D, v y ρ , con los cuales formaremos los tres números π

Por ende, existen tres números adimensionales que pueden construirse de modo que se relacionan entre sí:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

Así se escribe:

$$\pi_1 = D^a \cdot v^b \cdot \rho^c \cdot \Delta P$$

$$\pi_2 = D^d \cdot v^e \cdot \rho^f \cdot \ell$$

$$\pi_3 = D^g \cdot v^h \cdot \rho^i \cdot \mu$$

Se construyen los adimensionales para cada “ π ”:

$$\pi_1 = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0 = L^a \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^b \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \cdot \frac{M}{L \cdot T^2}$$

Luego se tiene:

$$\begin{aligned} M: & \quad 0 = c + 1 \\ L: & \quad 0 = a + b - 3c - 1 \\ T: & \quad 0 = -b - 2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene: $a = 0$, $b = -2$, $c = -1$

De este modo, se tiene:

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{v^2 \cdot \rho}$$

Conocido como el Número de Euler.

Análogamente se desarrolla los adimensionales π_2 y π_3 .

Se tiene como resultado al aplicar el mismo método lo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{L}{D} \\ \pi_3 &= \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \end{aligned}$$

Que corresponde al número de Reynolds

Luego,

$$\frac{\Delta P}{v^2 \cdot \rho} = f_n \left(\frac{\ell}{D}, \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \right)$$

Lo anterior explica la construcción del gráfico de Moody para calcular los factores de fricción. Del mismo modo explica la razón por la cual los números adimensionales tienen la relación de variables que son definidos.

Capítulo 5

Perfil de velocidades y pérdidas menores

5.1 Perfiles de velocidad en flujo laminar y turbulento.

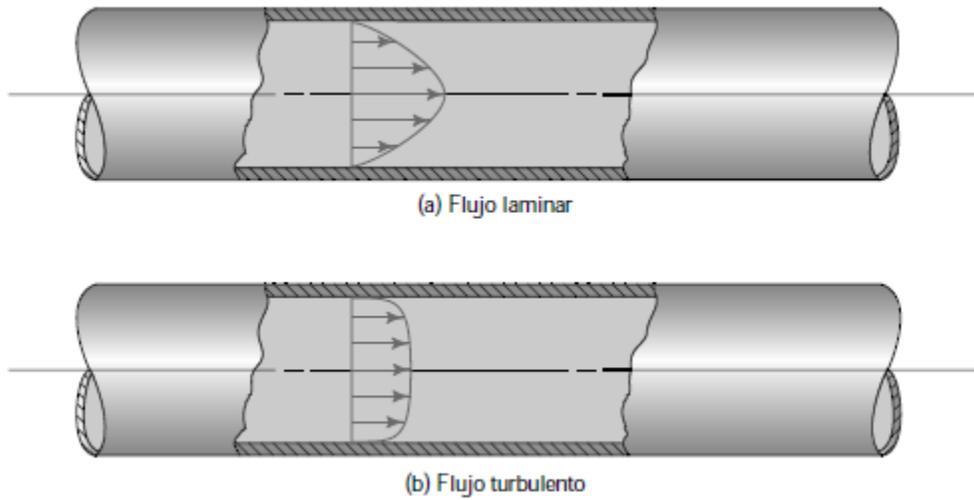


Figura 50: diagrama de perfiles en ductos

En un flujo laminar, es posible escribir una ecuación para la velocidad local en cualquier punto dentro de la trayectoria de flujo. Si la velocidad local es $u(r)$ y el radio es r , se denota r_0 como el radio máximo y la velocidad promedio como v , entonces

$$u(r) = 2v \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

Notar que en la pared de la tubería $\frac{r}{r_0} = 1$, por lo que, $u(r_0) = 0$. En $r = 0$, $\frac{r}{r_0} = 0$ y $u = 2v$

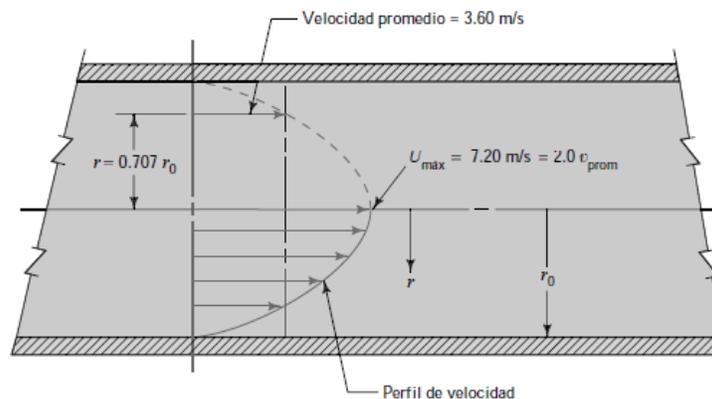


Figura 51: Perfil de velocidades en flujo laminar

$$u(r) = v = 2v \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{r}{r_0}$$

$$r = \sqrt{0,5} r_0$$

$$r = 0,707 r_0$$

Para un flujo turbulento el perfil de velocidad es de otra forma y no tiene la forma de parábola que se observa en el régimen laminar. En un régimen turbulento, la ecuación es de la forma

$$u = v \left[1 + 1,43\sqrt{f} + 2,15\sqrt{f} \log \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \right]$$

Otra manera de expresar esta ecuación es considerando como referencia la pared del tubo $y = r_0 - r$

$$1 - \frac{r}{r_0} = \frac{r_0 - r}{r_0} = \frac{y}{r_0}$$

Luego

$$u = v \left[1 + 1,43\sqrt{f} + 2,15\sqrt{f} \log \left(\frac{y}{r_0} \right) \right]$$

La velocidad máxima está en el centro de la tubería $r = 0$ ó $y = r_0$

$$u_{max} = v(1 + 1,43\sqrt{f})$$

\vec{v}_{prom} esta en $y = 0,216 r_0$

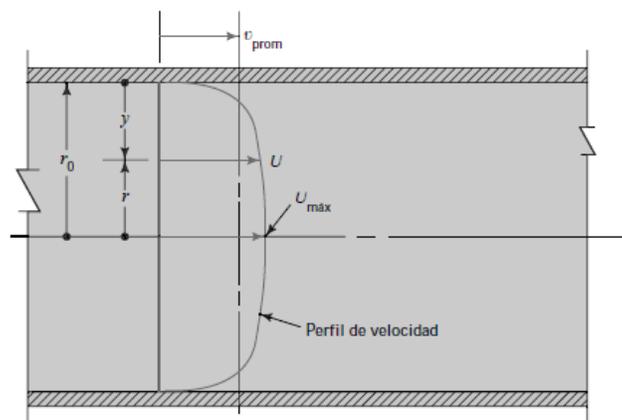


Figura 52: Perfil de velocidades en flujo turbulento

Flujo en secciones no circulares

Sigue operando la ecuación de la continuidad

$$Q = Av$$

$$v = \frac{Q}{A}$$

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

5.2 Cálculo de radio hidráulico para secciones transversales no circulares

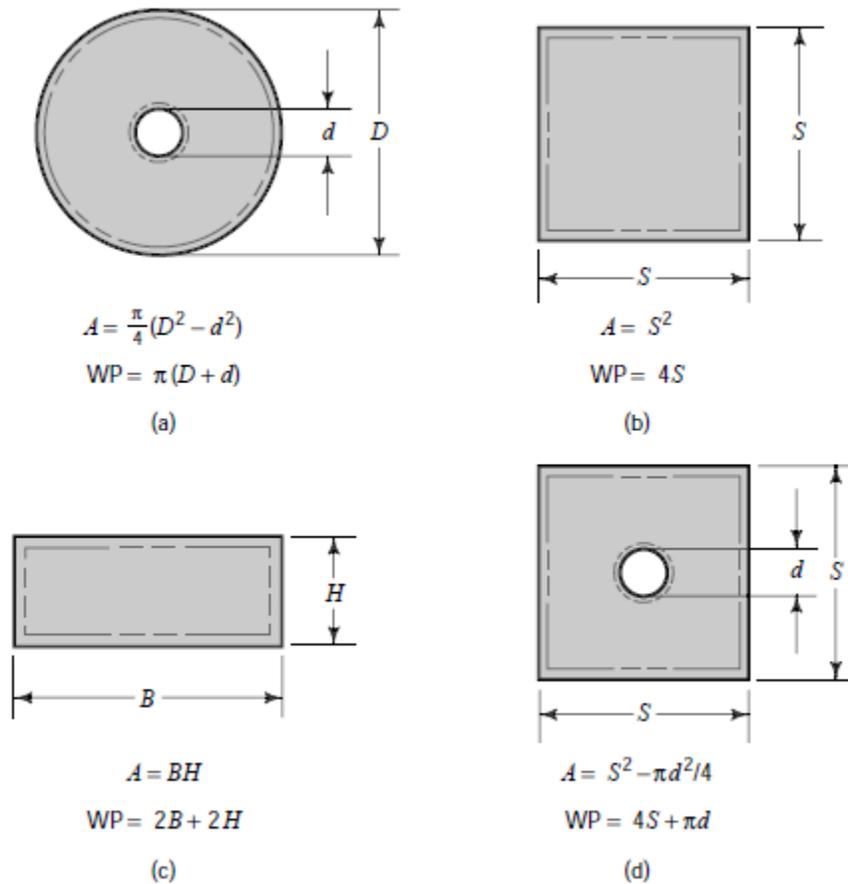


Figura 53: Áreas y perímetros de secciones

A la dimensión característica de las secciones transversales no circulares se les denomina radio hidráulico “R” y se define como la razón neta entre del área neta de la sección transversal de una corriente de flujo y el perímetro mojado de la sección.

$$R = \frac{A}{WP} = \frac{\text{Área}}{\text{Perímetro mojado}}$$

5.3 Número de Reynolds para secciones transversales cerradas no circulares

Se sustituye "D" por "4R" con R igual al radio hidráulico

$$N_R = \frac{\rho (4R)}{\eta}$$

Observar que un conducto circular

$$R = \frac{A}{PM} = \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4} \rightarrow 4R = D$$

Perdidas de fricción:

$$H_L = f * \frac{L}{D} * \frac{v}{2g} = f * \frac{L}{4R} * \frac{v}{2g}$$

Además $\frac{D}{\varepsilon}$ que es la rugosidad relativa se transforma a $\frac{4R}{\varepsilon}$

Problema 33:

Por el ducto recto de largo 12 metros, de sección naranja figura 54, fluye glicerina ($\rho=1260$) con caudal de $0,2 \frac{\text{litros}}{\text{segundo}}$. La viscosidad dinámica es $9,6 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. La figura 53 ilustra secciones cuadradas y semicircunferencias.

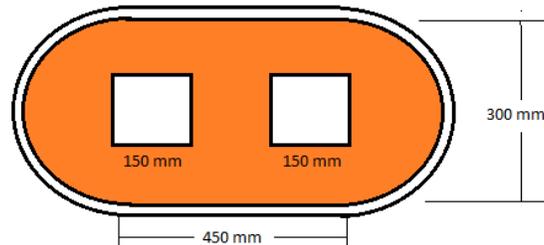


Figura 54: Sección transversal del ducto.

- Determine el número de Reynolds del sistema.
- Determine la pérdida de carga por fricción (h_L) del sistema

Solución:

$$N_R = \frac{\rho \cdot v \cdot 4R_H}{\eta}$$

El radio hidráulico se calcula:

$$R_H = \frac{\text{área mojado por glicerina}}{\text{perímetro mojado por glicerina}} = \frac{0,16065 \text{ m}^2}{3,042 \text{ m}} = 0,0528 \text{ m}$$

$$N_R = \frac{\rho \cdot V \cdot 4R_H}{\eta} = \frac{1260 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot V \cdot 4 \cdot 0,0528 \text{ m}}{9,6 \cdot 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}}$$

$$Q = 0,2 \frac{\text{L}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}} = 0,0002 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0,0002 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{0,16065 \text{ m}^2} = 1,2449 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$N_R = \frac{\rho \cdot V \cdot 4R_H}{\eta} = \frac{1260 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1,2449 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \cdot 0,0528 \text{ m}}{9,6 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s}}$$

$$N_R = 0,345$$

$$\text{b) } h_L = f \frac{L}{4R_H} \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{Para calcular } f \text{ se requiere conocer } f = \frac{64}{N_R} \rightarrow f = \frac{64}{0,345} = 185,45$$

$$h_L = 185,45 \frac{12 \text{ m}}{4 \cdot 0,0528 \text{ m}} \frac{\left(1,2449 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h_L = 8,32 \times 10^{-4} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{N}}$$

Problema 33:

A través de la porción sombreada del ducto, de un intercambiador de calor figura 55, fluye agua a razón de $85 \frac{\ell}{\text{min}}$. La coraza está hecha de cobre de radio interior $R = 25 \text{ mm}$. La estructura tiene tres tubos idénticos de radio exterior $r = 6 \text{ mm}$ por donde circula aire en su interior. El agua tiene una densidad de $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ y una viscosidad dinámica de $1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. El tubo tiene un largo de $3,0 \text{ m}$ de longitud y se conoce su rugosidad $\epsilon = 1,5 \times 10^{-6} \text{ m}$.

- Calcular el número de Reynolds del agua en la sección sombreada.
- Determine la pérdida de carga h_L por efecto del roce del agua en las paredes de la sección.

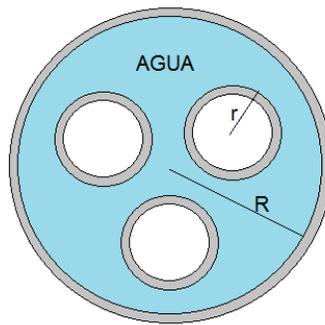


Figura 55: sección de Intercambiador de calor

Solución:

a)

$$N_R = \frac{\rho \cdot V \cdot 4R_H}{\eta}$$

El radio hidráulico se calcula:

$$R_H = \frac{\text{área mojado por agua}}{\text{perímetro mojado por agua}} = \frac{\pi(R^2 - 3r^2)}{2\pi(R + 3r)} = \frac{(25/1000)^2 - 3(6/1000)^2}{2[(25/1000) + 3(6/1000)]} \text{ m} = \frac{6,25 \cdot 10^{-4} - 1,08 \cdot 10^{-4}}{2(0,025 + 0,018)} \text{ m}$$

$$R_H = \frac{5,17 \cdot 10^{-4}}{0,086} \text{ m} = 0,00601163 \text{ m}$$

$$N_R = \frac{\rho \cdot V \cdot 4R_H}{\eta} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot v \cdot 4 \cdot 0,00601163 \text{ m}}{10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}}$$

$$Q = 85 \frac{\ell}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \ell} = 0,001416666 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0,001416666 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi * 5,17 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \frac{2,74 \text{ m}}{\pi \text{ s}} = 0,872 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$N_R = \frac{\rho \cdot V \cdot 4R_H}{\eta} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,872 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \cdot 0,00601163 \text{ m}}{10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 20968$$

El régimen es turbulento.

b) $h_L = f \frac{L}{4R_H} \frac{V^2}{2g}$

Para calcular f se requiere conocer $\frac{D}{\epsilon} = \frac{4R_H}{\epsilon} = \frac{4 \cdot 0,00601163 \text{ m}}{1,5 \times 10^{-6} \text{ m}} = 16031$

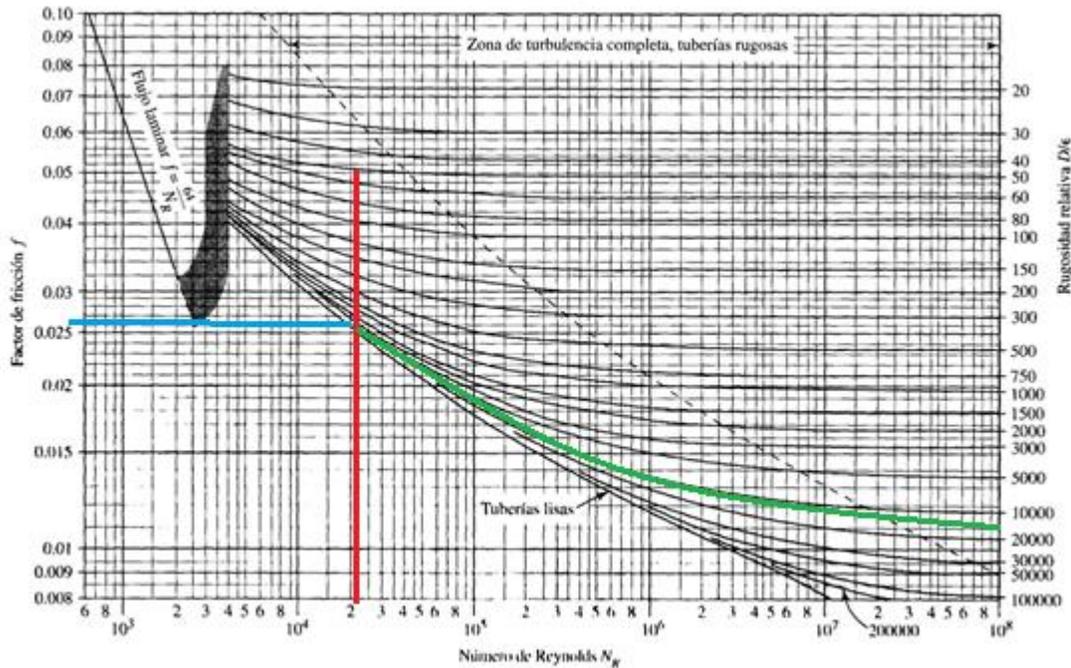


FIGURA 8.6 Diagrama de Moody. (Fuente: Pao, R. H. F. 1961. *Fluid Mechanics*. Nueva York: John Wiley e hijos, p. 284.)

Usando Moody se obtiene $f = 0,026$

$$h_L = 0,026 * \frac{3,0 \text{ m}}{4 \cdot 0,00601163 \text{ m}} \frac{\left(\frac{2,74 \text{ m}}{\pi \text{ s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h_L = 0,126 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{N}}$$

5.4 Pérdidas menores

Se desea estimar pérdidas en ductos por variación de tamaño o por el uso de válvulas y accesorios comunes en sistemas de tuberías

5.4.1 Coeficiente de resistencia

Las pérdidas de energía son proporcionales a la carga de velocidad del fluido, al pasar por un “codo”, una expansión o contracción de flujo (sección) o por una válvula. Estas pérdidas se reflejan por medio de un coeficiente de resistencia “K”, como se indica:

$$H_L = K \left(\frac{v^2}{2g} \right)$$

Donde v es la velocidad promedio en la vecindad.

En expansiones y contracciones de sección la velocidad varia y esta debe ser consistente con el cálculo de K. Donde K es adimensional.

5.4.1.2 Expansión súbita:

Si existe una expansión abrupta (figura 56), se generan turbulencias en el líquido que se acompaña de pérdidas de energía. La cantidad de turbulencia y, por lo tanto, la pérdida de energía depende de la relación de tamaño de las tuberías

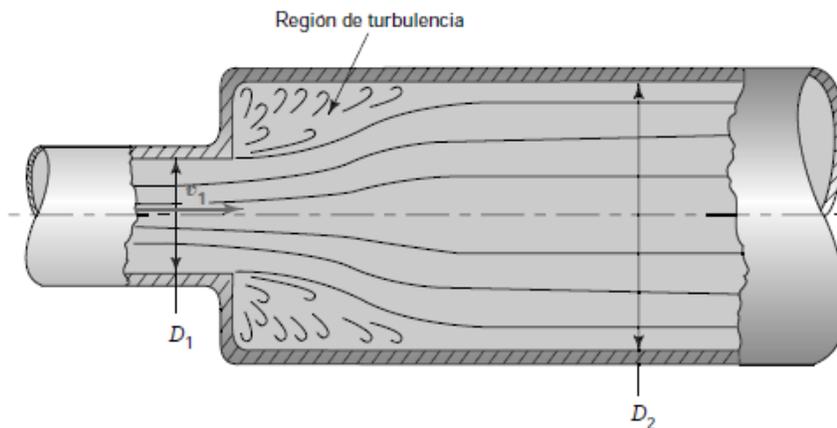


Figura 56: Expansión abrupta

La pérdida menor se calcula por la ecuación

$$H_L = K \left(\frac{v_1^2}{2g} \right)$$

Con v_1 , velocidad promedio del flujo en la tubería más pequeña, antes de la expansión.

Pruebas experimentales han demostrado que el valor del coeficiente de pérdida “K”, depende tanto de la relación de los tamaños de las dos tuberías como de la magnitud de la velocidad del flujo.

$$K = \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2$$

Donde A_1 es la sección pequeña y A_2 la sección grande.

La ecuación anterior funciona bien a $v = 1,2 \frac{m}{s}$ ($4 \frac{ft}{s}$) a velocidades mayores los "K" reales son menores que el teórico.

La figura anterior da cuenta de "K" si se conoce D_2/D_1 y la velocidad de flujo v_1

Problema 34:

Determine la pérdida de energía que ocurrirá si fluyen $100 \frac{\ell}{min}$ de agua a través de una expansión súbita de un tubo de cobre de 1 pulgada (tipo k) a otro de 3 pulgadas (tipo k). Consulte en el apéndice H las dimensiones del tubo.

Solución:

$$D_1 = 25,3 \text{ mm} = 0,0253 \text{ m}$$

$$A_1 = 5,017 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$D_2 = 73,8 \text{ mm} = 0,0738 \text{ m}$$

$$A_2 = 4,282 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{100 \frac{\ell}{min}}{5,017 \times 10^{-4} \text{ m}^2} * \frac{1 \frac{m^3}{s}}{60000 \frac{l}{min}} = 3,32 \frac{m}{s}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{\left(3,32 \frac{m}{s} \right)^2}{2 * 9,81 \frac{m}{s^2}} = 0,56 \text{ m}$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{73,8}{25,3} = 2,52$$

Con los datos, en la figura anterior, se obtiene $k=0,78$.

Luego

$$H_L = K \left(\frac{v_1^2}{2g} \right) = 0,78 * 0,56 \text{ m} = 0,44 \text{ m}$$

Si se desea calcular variaciones de presión, pueden estimarse por medio de la ecuación general de la energía adicionando las distintas pérdidas "H_L" de modo que

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \sum_{i=1}^n H_{Li} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Perdidas en la salida

Cuando un fluido pasa de una tubería a un estanque grande, como se muestra en la figura inferior, su velocidad disminuye hasta cero.

En este caso se considera la pérdida en término de la caída de energía cinética, de modo que:

$$H_L = 1,0 * \left(\frac{v_1^2}{2g} \right), \quad K = 1,0$$

En este caso no es de importancia la geometría del empalme del tubo en la pared del estanque. Se entiende que el estanque es un fluido en reposo.

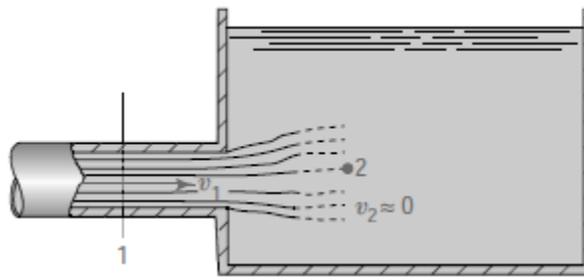


Figura 57: paso de una tubería a un estanque grande

5.4.1.2 Expansión gradual

Es una pérdida menor a la que se tiene en una expansión súbita (figura 58). Esto se logra usando una sección cónica entre ambas tuberías.

La pérdida H_L está dada por

$$H_L = K \left(\frac{v_1^2}{2g} \right)$$

Con v_1 , velocidad en la tubería más pequeña. La magnitud de "K" depende tanto de la relación de diámetros (D_2/D_1) como del ángulo del cono " θ "

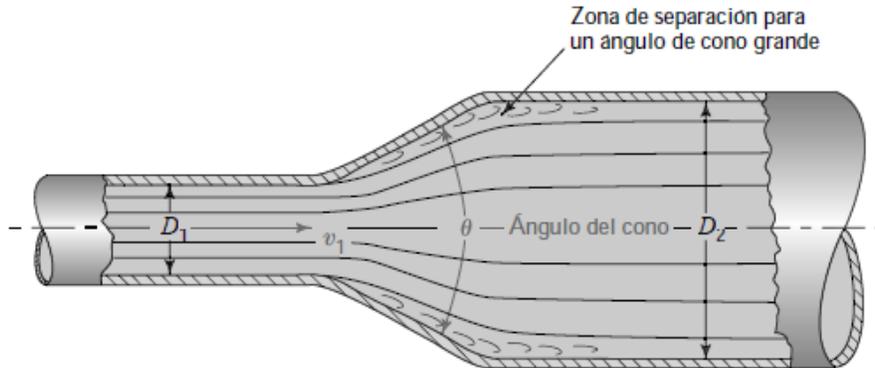


Figura 58: Expansión súbita

El cálculo no incluye la pérdida por fricción en la pared de la sección cónica. Si el ángulo es grande, el cono es de longitud pequeña y la pérdida despreciable.

Problema 35:

Determinar la pérdida de energía cuando fluyen 100 ℓ/min de agua, en un tubo de cobre (tipo k) de 1 pulgada a otro de 3 pulgadas similar, si experimenta una expansión gradual con ángulo de cono de 30°

Solución:

$$v_1 = 3,32 \frac{m}{s}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = 0,56 \text{ m} \quad (\text{Calculado en el problema 34})$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{73,8}{25,3} = 3,382$$

De la figura superior se obtiene que con 30° "K" es 0,48

$$H_L = 0,48 * 0,56 \text{ m} = 0,27 \text{ m}$$

Las expresiones anteriores son útiles en cálculos de difusores ya que son dispositivos que desaceleran fluido que circula de una tubería más pequeña a otra más grande. Los difusores pueden ser súbitos o graduales.

La ecuación en difusores suele escribirse por

$$P_2 - P_1 = \gamma \left[\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} - H_L \right]$$

5.4.1.3 Contracción súbita

$$H_L = k \left(\frac{v_2^2}{2g} \right)$$

Donde v_2 es la velocidad en la tubería pequeña aguas debajo de la contracción figura 59.

“K” depende de la relación de tamaños de las dos tuberías y de la velocidad de flujo (v_2) las pérdidas de carga se deben principalmente a la formación de una vena contracta

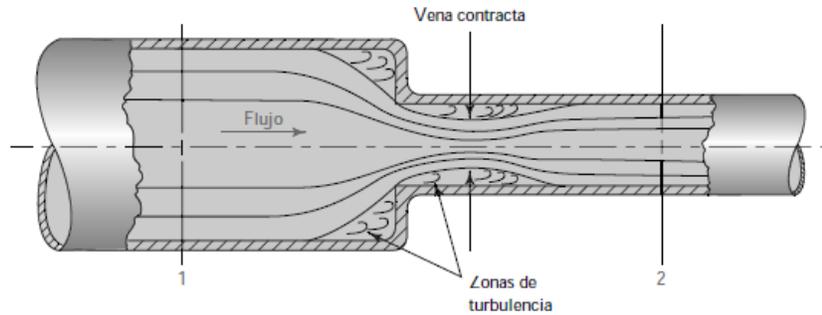


Figura 59: Contracción súbita

5.4.1.4 Contracción gradual

También se encuentra un ángulo de cono “u” figura 60

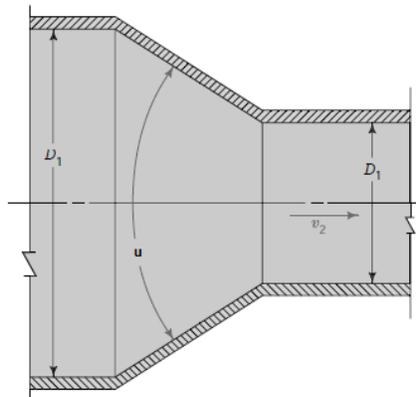


Figura 60: Contracción gradual

Si la contracción gradual tiene su extremo redondeado “K” es menor al calculado

5.4.1.5 Pérdida en la entrada

Sea un estanque que descarga en una tubería

$$H_L = K \left(\frac{v_2^2}{2g} \right)$$

Donde v_2 es la velocidad del flujo en el tubo figura 61

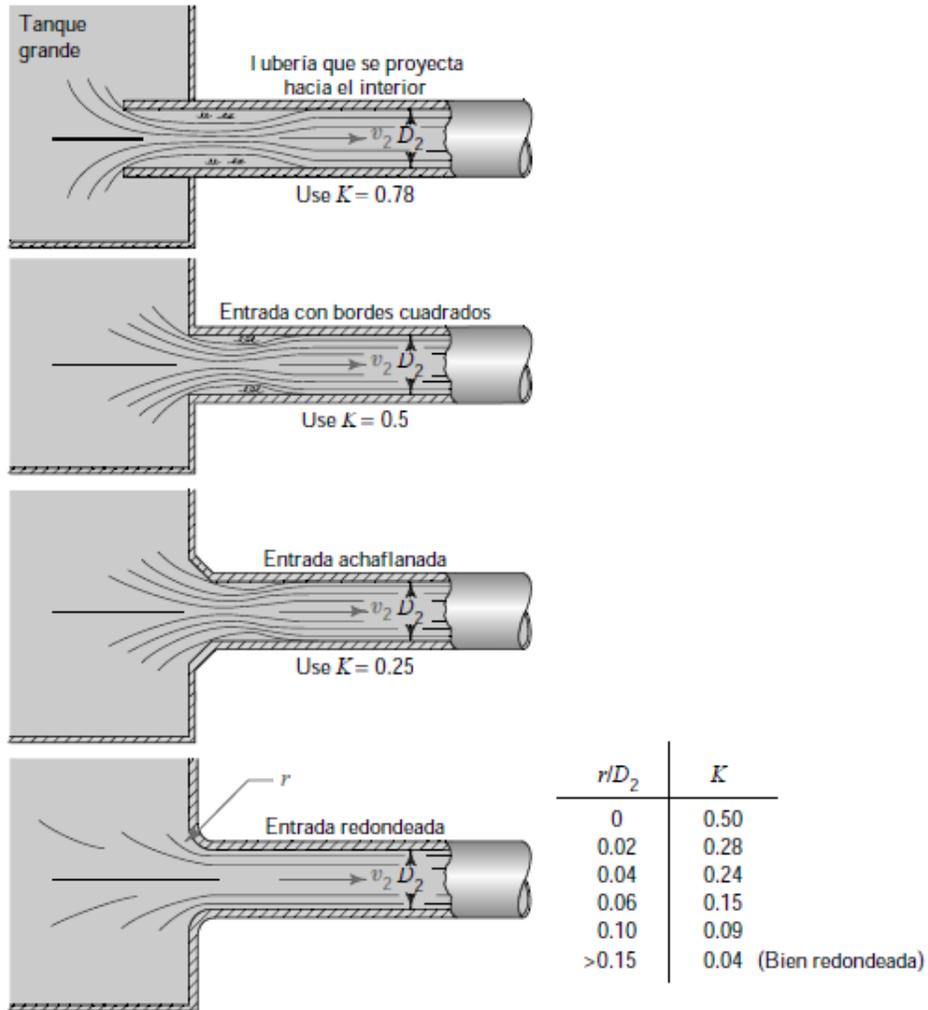


Figura 61: Casos de pérdida de entrada

5.5 Coeficientes de resistencia para válvulas y acoplamiento

Existe una gran variedad de válvulas y acoplamientos (accesorios) para cumplir con las especificaciones de un sistema de circulación de fluidos.

Los acoplamientos hacen que cambie su tamaño o su trayectoria y consisten en: tes, codos, reductores, boquillas y orificios. Los distintos fabricantes reportan los datos de distintas formas.

Las pérdidas de energía se estiman en estos casos por medio de la ecuación

$$H_L = K \left(\frac{v^2}{2g} \right)$$

El valor del coeficiente de resistencia “K” se reporta por medio de la expresión

$$K = \left(\frac{L_e}{D} \right) f_T$$

Donde el valor de $\frac{L_e}{D}$, llamado relación de longitud equivalente se considera constante para un tipo de válvula o accesorio.

El valor “ L_e ” se conoce como longitud equivalente y es la longitud de la tubería recta del mismo diámetro nominal que el de la válvula, la cual tendría la misma resistencia que esta. El término “ D ” es el diámetro interior real de la tubería.

El termino f_T es el factor de fricción en la tubería a la que está conectada la válvula o acoplamiento, que se asume que está en una zona de turbulencia completa.

Los valores de f_T varían según el tamaño de la tubería y la válvula, lo que afecta “K”. Se presenta la tabla 5 para valores de f_T para tubería de acero estándar comercial, nueva y limpia.

Tamaño nominal de la tubería			Tamaño nominal de la tubería		
Estados Unidos (in)	Métrico (mm)	Factor de fricción, f_f	Estados Unidos (in)	Métrico (mm)	Factor de fricción, f_f
½	DN 15	0.026	3, 3½	DN 80, DN 90	0.017
¾	DN 20	0.024	4	DN 100	0.016
1	DN 25	0.022	5, 6	DN 125, DN 150	0.015
1¼	DN 32	0.021	8	DN 200	0.014
1½	DN 40	0.020	10-14	DN 250 a DN 350	0.013
2	DN 50	0.019	16-22	DN 400 a DN 550	0.012
2½	DN 65	0.018	24-36	DN 600 a DN 900	0.011

Respecto a la estimación de la longitud equivalente $\left(\frac{L_e}{D} \right)$ en diámetros de tubería según la válvula o acoplamiento, se presenta la tabla 6:

TABLA 6 Resistencia en válvulas y accesorios expresada como la longitud equivalente en diámetros de tubería, L_e/D

Tipo	Longitud equivalente en diámetros de tubería L_e/D	Tipo	Longitud equivalente en diámetros de tubería L_e/D
Válvula de globo —totalmente abierta	340	Válvula de pie —tipo disco de vástago	420
Válvula de ángulo —totalmente abierta	150	Válvula de pie —tipo disco de bisagras	75
Válvula de compuerta —totalmente abierta	8	Codo estándar de 90°	30
—abierta ¼	35	Codo de 90° y radio largo	20
—abierta ½	160	Codo de 90° para calle	50
—abierta ¾	900	Codo estándar de 45°	16
Válvula de retención —tipo oscilante	100	Codo de 45° para calle	26
Válvula de retención —tipo bola	150	Doblez de retorno cerrado	50
Válvula de mariposa —totalmente abierta, 2-8 in	45	Te estándar —con flujo por la línea principal	20
—10-14 in	35	—con flujo por la ramificación	60
—16-24 in	25		

Algunos diseñadores de sistemas prefieren calcular la longitud equivalente de una válvula y combinar su valor con la longitud real del tubo:

$$L_e = K \frac{D}{f_T}$$

Otra posibilidad es calcular

$$L_e = \left(\frac{L_e}{D}\right) D$$

Lo anterior es válido en la zona de turbulencia completa.

Si la tubería no fuese de acero, se requiere calcular la rugosidad relativa D/ϵ y usar el diagrama de Moody para determinar el factor de fricción en la zona de turbulencia completa.

Problema 36:

Determine el coeficiente de resistencia “K” para una válvula globo abierta por completo, colocada en una tubería de acero de 6 pulgadas, cedula 40.

Solución

$$\frac{L_e}{D} = 340$$

Tubería 6 pulgadas $f_T = 0,015$ y $D = 0,5054 \text{ ft}$ de diámetro interior (Tabla 5).

$$K = \left(\frac{L_e}{D}\right) f_T = 340 * 0,015 = 5,10$$

La longitud equivalente es:

$$L_e = K \frac{D}{f_T} = 5,1 * \frac{0,5054 \text{ ft}}{0,015} = 172 \text{ ft}$$

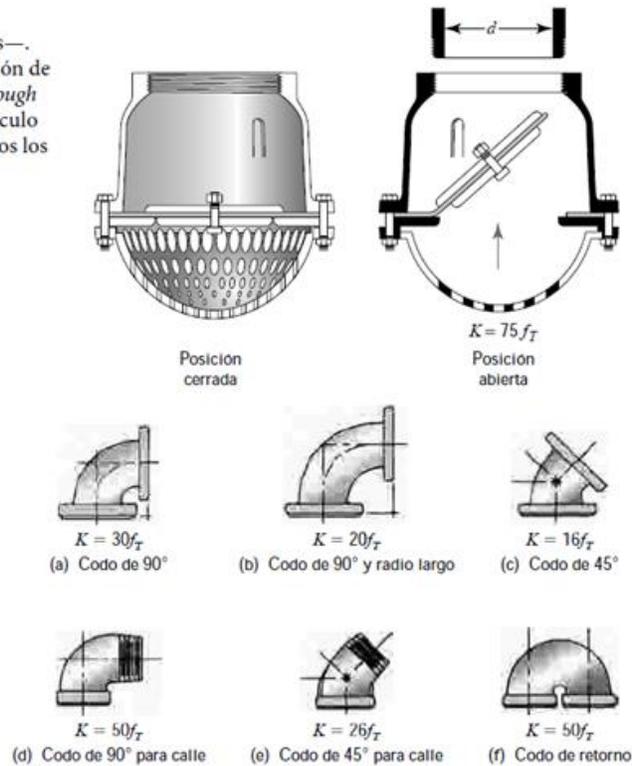
Problemas propuestos:

- a) Calcule la caída de presión a través de una válvula de globo abierta por completo, situada en una tubería de acero de 4 pulgadas, cedula 40, por la que circulan 400 gal/min de aceite ($\text{sg} = 0,87$)
- b) Calcule la pérdida de energía para el flujo de $500 \text{ m}^3/\text{hr}$ de agua, a través de una "Te" estándar conectada a una tubería de hierro dúctil de 6 pulgadas, sin recubrimiento. El flujo tiene lugar por el ramal.

5.5.1 Aplicación de válvulas estándar

El valor de "K" refleja la energía que disipa cada válvula. Evidentemente las de globo son las de peor rendimiento. Por su parte la figura 67 ofrece los valores de "K" de algunos accesorios. Detalles de válvulas y accesorios y sus principios de operación se encuentran en Mott, pagina 300-302, 309-313.

FIGURA 67 Válvula de pie con filtro —disco de bisagras—. (Reproducido con autorización de Crane Co. *Flow of Fluids through Valves, Fittings and Pipe*, artículo técnico núm. 410, 2009. Todos los derechos reservados)



5.5.1 Vueltas de tuberías (90°)

Es frecuente doblar tubos en lugar de instalar codos. La resistencia al flujo que opone esta curvatura depende del radio de la curvatura “ r ” y el diámetro interior del tubo, “ D ”.

La resistencia está dada en términos de L_e/D , por lo que

$$K = \left(\frac{L_e}{D}\right) f_T$$

Al calcular “ r/D ” se define “ r ” como el radio de la línea central del ducto o tubo que se denomina radio medio.

Las relaciones de tamaño son las siguientes:

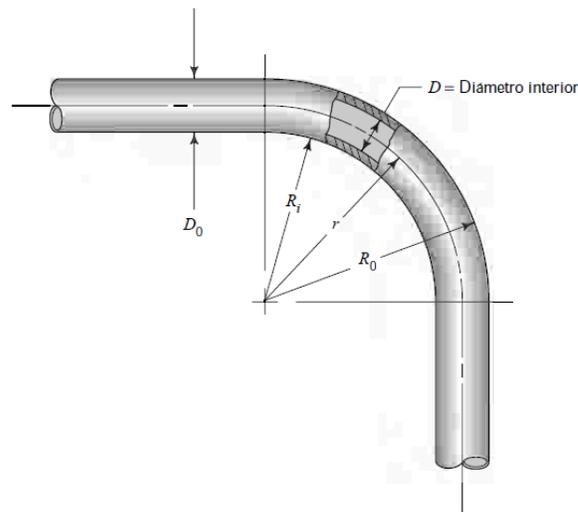


Figura 68: ilustra resistencias debidas a vueltas en 90° en tuberías.

$$r = R_i + D_o/2$$

$$r = R_o - D_o/2$$

$$r = (R_o + R_i)/2$$

5.5.2 Vueltas de tuberías con ángulo distinto de 90°

$$K_B = (n - 1) \left[0,25 \frac{r}{D} + 0.5K \right] + K$$

Donde K es la resistencia para una vuelta a 90°.

5.6 Problemas Propuestos

Problema 1

La figura 67 muestra una bomba y un manómetro conectada a una tubería cilíndrica por donde circula agua, indicando sus dimensiones. Se indica la diferencia de altura del mercurio en un manómetro como “1” [m] y los diámetros “a” y “b” de la cañería. La viscosidad es $9,6 \times 10^{-1} Pa \cdot s$. El peso específico del agua es $9,81 \frac{kN}{m^3}$ y “sg” de mercurio es 13,54, la pérdida total de energía fue estimada en 8,0 m. La rugosidad en ambas tuberías es de $\epsilon = 10^{-5} m$.

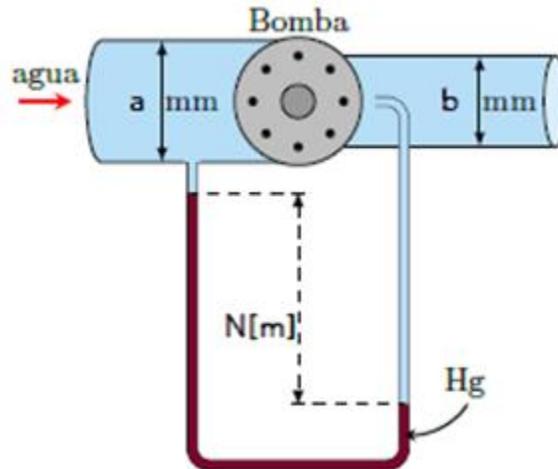


Figura 67: Bomba dotada de un manómetro

Sea:

$$a = 10 \text{ mm} \text{ y } b = 30 \text{ mm}$$

Determine:

- La potencia en “hp” que debe entregar la bomba al fluido para que el caudal sea de 500 ℓ/min .
- La velocidad del fluido al interior de la cañería más gruesa, medida una distancia de un cuarto de radio midiendo desde la pared en iguales condiciones que (a).

Problema 2

Por el ducto recto de largo 90 metros, de sección coloreada, fluye un líquido ($sg=1,5$) con caudal de $12 \frac{\ell}{\text{minuto}}$. La viscosidad es $9,6 \times 10^{-3} Pa \cdot s$. La figura 68 ilustra sección transversal. Los cilindros tienen una rugosidad de: $\epsilon = 10^{-2} m$.

$$R_1 = 21 \text{ mm}$$

$$R_2 = 32 \text{ mm}$$

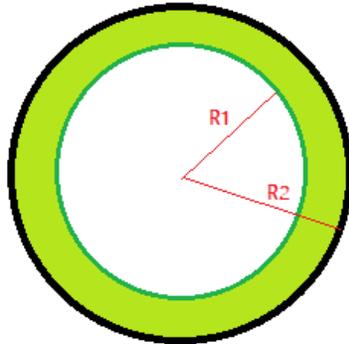


Figura 68: Sección transversal del ducto.

Determine

- a) El número de Reynolds del sistema.
- b) La pérdida de carga por fricción (h_L) del sistema

Datos:

$$1 \text{ hp} = 550 \frac{\text{lb} \cdot \text{pie}}{\text{s}}$$

$$1 \text{ psi} = 1 \frac{\text{lb}}{\text{pul}g^2}$$

$$1 \text{ pie} = 12 \text{ pul}g$$

$$g = 32,2 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}$$

Problema 3

Se tiene un intercambiador de calor que consiste en un arreglo cuatro tubos cilíndricos cuya sección transversal es idéntica en los cuatro tubos, con un área circular de radio exterior 1,0 m. Los tubos están confinados en una carcasa de perfil cuadrado de arista 4,0 m, siendo esta la dimensión interior de la carcasa.

La figura 69 ilustra un corte transversal del arreglo. Por el área definida entre la carcasa y los tubos, circula un líquido (zona en color celeste).

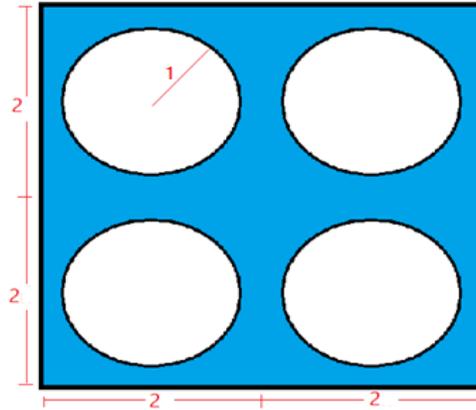


Figura 69: Intercambiador de calor (perfil)

Suponga 90 m longitud lineal de tubería horizontal.

El fluido circula entre la carcasa (de perfil cuadrado) y los tubos tiene un flujo volumétrico de $Q = \frac{1}{50} \frac{m^3}{s}$.

El fluido tiene las características:

viscosidad cinemática: (ν): $36,5 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

densidad del fluido (ρ): $1,3 \frac{g}{cm^3}$

El material de las tuberías y carcasa tiene una rugosidad de: $\epsilon = 10^{-5} m$.

Determinar:

- El radio hidráulico
- El número de Reynolds.
- El factor de fricción
- La pérdida de energía por fricción con tuberías " h_L "

Problema 4

Para mover un fluido entre los puntos (1) y (2), se dispone de una bomba. El fluido impulsado tiene densidad de $1,30 \frac{\text{slugs}}{\text{pie}^3}$ y una viscosidad dinámica de $5 \times 10^{-6} \frac{\text{lb}_f \cdot \text{s}}{\text{pie}^2}$.

La bomba entrega un caudal de $0,211 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$. La figura 70 ilustra los datos de dimensiones y presiones del sistema, la presencia de la bomba, codos, secciones de tubería y su perfil.

La tubería conectada a la succión de la bomba tiene una sección de área transversal "S1" y la descarga de ésta presenta una tubería de sección transversal "S2".

La tubería en toda su extensión es del mismo material y su rugosidad en las tuberías es de $\epsilon = 5 \times 10^{-4} \text{ pies}$. Todos los codos presentan un coeficiente de resistencia $K = 30 f_T$, donde " f_T " representa la pérdida de fricción en la cañería.

Las áreas transversales de las tuberías circulares son $S1 = 0,05 \text{ pie}^2$ y $S2 = 0,03 \text{ pie}^2$.

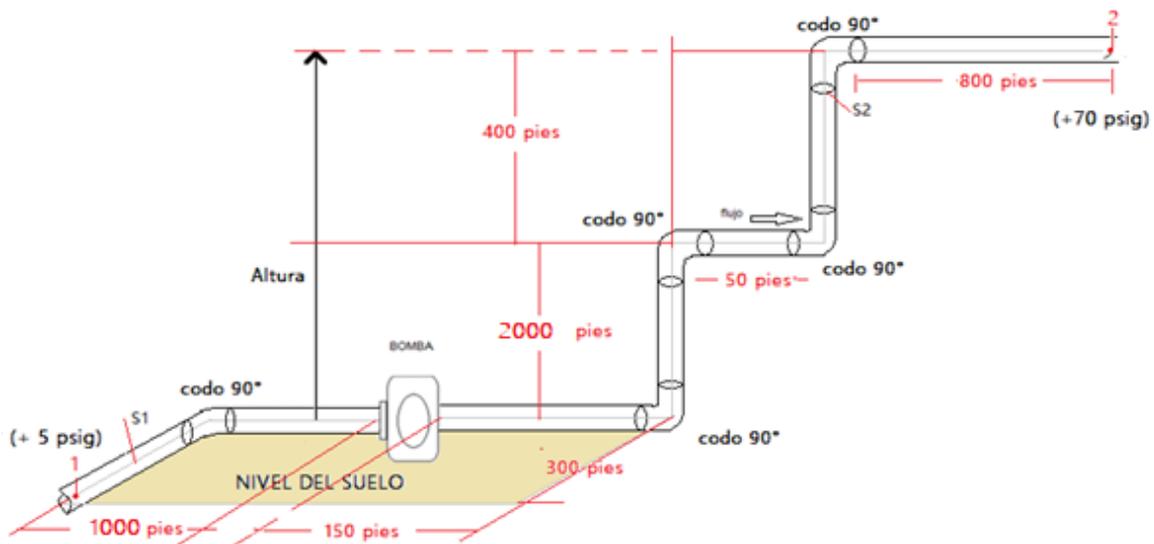


Figura 70: Montaje.

Determine:

- El número de Reynolds en la cañería de sección 1 y su coeficiente de fricción.
- El número de Reynolds en la cañería de sección 2 y su coeficiente de fricción.
- La pérdida de energía h_L total del sistema en pies (roce y accesorios).
- La potencia de la bomba en "hp" que debe transmitir la bomba al fluido.

Problema 5:

Para mover un fluido entre los puntos (1) y (2), se dispone de una bomba figura 71. El fluido impulsado tiene densidad de $1,60 \frac{\text{slugs}}{\text{pie}^3}$ y una viscosidad dinámica de $3,5 \times 10^{-5} \frac{\text{lb}_f \cdot \text{s}}{\text{pie}^2}$.

La bomba entrega un caudal de $1,14 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$.

Asuma que se conoce la pérdida de energía del sistema y es de 15 pies.

Las áreas transversales de las tuberías circulares son $S1 = 0,088 \text{ pie}^2$ y $S2 = 0,051 \text{ pie}^2$. El ángulo " α " es de: $\alpha = (60)^\circ$

La diferencia de alturas entre las tuberías en (1) y (2) es de 16000 pies.

- a) Determine los hp que debe transmitir la bomba al fluido.
- b) Determine el número de Reynolds en ambas cañerías (en puntos 1 y 2).

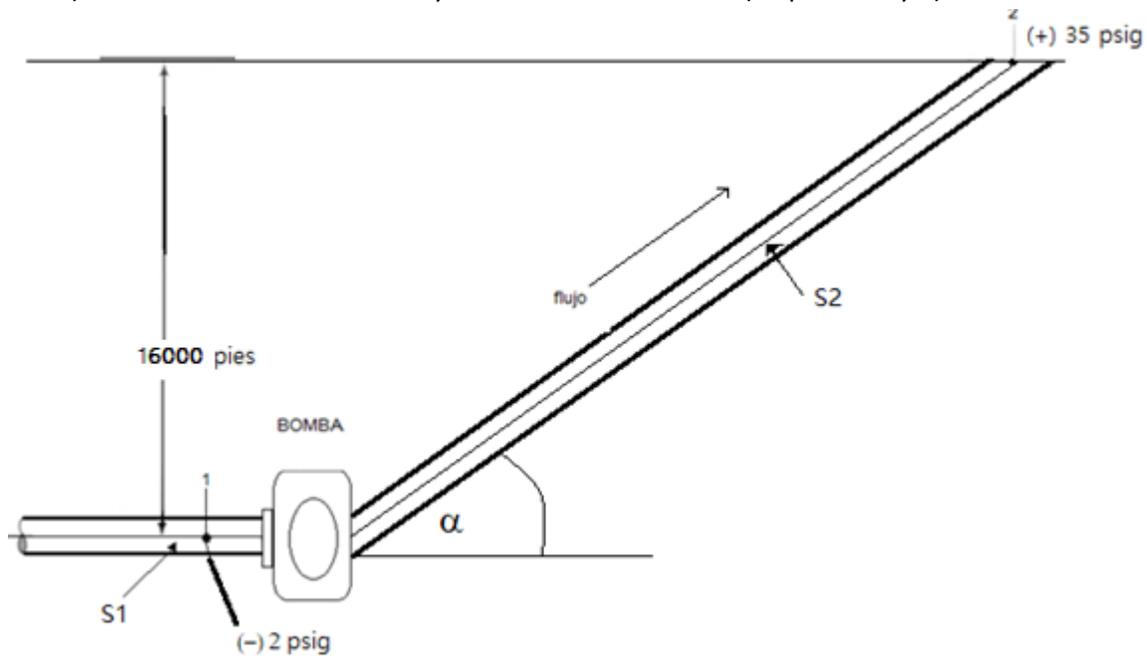


Figura 71: Bomba impulsora

Problema 6

Se tiene un intercambiador de calor que consiste en un arreglo de “n” tubos de perfil cuadrado dentro de una carcasa cuadrada de arista “P”, siendo esta la dimensión interior de la carcasa. La figura ilustra un corte transversal del arreglo. Por el exterior del sistema de tuberías compuesto de “n” tubos cuadrados, circula un líquido (zona naranja de la figura 72).

Suponga ($N^{\circ}lista * 50 + 50$) pies de longitud lineal de tubería horizontal.

El fluido circula entre la carcasa (de perfil cuadrado) y los tubos tiene un flujo volumétrico de $Q = N^{\circ}lista * 10 \left[\frac{pies^3}{s} \right]$.

Los tubos cuadrados son todos idénticos en sus dimensiones y su arista exterior de cada uno es de 1,5 pies.

La cantidad de tubos que contiene el perfil que ilustra la figura son: $n = N^{\circ}lista + 12$

$$P = \frac{(N^{\circ}lista * 2 + 100)}{4} \text{ pies}$$

El fluido tiene las características:

viscosidad cinemática: (ν): $\left(10 + \frac{(N^{\circ}lista)}{20} \right) \times 10^{-8} \frac{pies^2}{s}$

El material de las tuberías y carcasa tiene una rugosidad de: $\epsilon = N^{\circ}lista \times 10^{-3} \text{ pies}$.

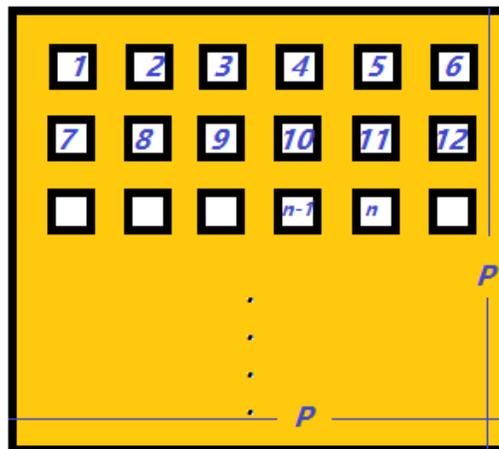


Figura 72: perfil de intercambiador de calor

- Calcule el radio hidráulico
- Calcule el número de Reynolds.
- Calcule el factor de fricción
- Determine h_L (pérdida de energía por fricción con tuberías)

Problema 7

El sistema bomba-turbina de la figura 73 recibe agua del depósito superior en el día para generar electricidad para una ciudad mediante una turbina. Por la noche, bombea agua desde el depósito inferior al superior para restablecer la situación. Para un caudal de diseño de $(N^{\circ} \text{ lista} * 10000) \text{ l/min}$ en una u otra dirección y despreciando la pérdida de carga por fricción, la eficiencia del sistema es de un 70% (tanto para la turbina como para la bomba).

Datos:

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

$$\gamma_w = 9,81 \frac{kN}{m^3}$$

$$1hp = 745,7 W$$

Determine en unidades de HP:

- La potencia que se extrae del agua cuando funciona como turbina.
- La potencia que genera la turbina.
- La potencia que entrega la bomba al agua durante la noche.
- La potencia consumida por la bomba.

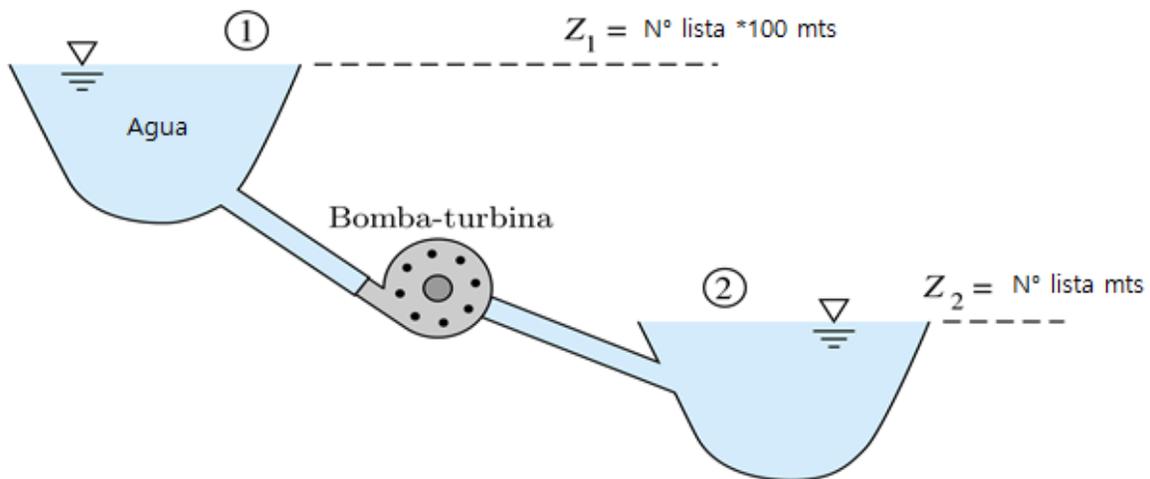


Figura 73: Sistema bomba- turbina

Bibliografía

1. Robert L. Mott, Mecánica de fluidos. Sexta edición. Pearson Educación, México 2006
2. White F. (2008) Mecánica de Fluidos. Sexta edición. España: McGraw Hill.
3. Potter M., Wiggert D., Ramadan B., Shih T. (2015) *Mecánica de Fluidos*. (4ª ed.) México: Cengage Learning
4. Galán, J.L. (1987). Sistemas de Unidades Físicas. España. Editorial Reverté. Primera Edición.